Арнольд Бернхардт

Геометрия

для 7–8-го классов
вальдорфской школы

Руководство для учителей,
родителей и учеников,
снабженное большим
количеством примеров

Издательство Центра
вальдорфской педагогики

1999

Бернхардт А. **Геометрия.** / Пер. с нем. — М.: Издательство Московского Центра вальдорфской педагогики, 1999. — 192 с.

Вниманию читателей предлагается оригинальная методическая работа опытного швейцарского педагога Арнольда Бернхардта, посвященная преподаванию геометрии в 7—8-м классах общеобразовательной школы. Хотя автор адресует свою книгу прежде всего педагогам вальдорфских школ, однако, она, несомненно, будет интересна и более широкому кругу читателей. Работа подкупает удивительно ясным и последовательным изложением, четкой, простроенной аргументацией, большим количеством точно подобранных заданий для учащихся. Последнее обстоятельство позволяет использовать ее непосредственно при подготовке к урокам. Кроме того, автор подробно рассматривает оригинальные подходы к объяснению таких традиционно непростых для понимания тем, как теорема Пифагора, исследование площадей, решение прямоугольного треугольника. Ему удается включить эти, казалось бы, чисто математические главы в более широкий контекст и тем самым сделать их значительно доступнее для восприятия и усвоения школьниками.

ISBN 5-85251-056-4

Содержание

Предисловие — цель настоящей книги

Дорогой читатель,

предлагаемая “Геометрия” для 7—8-го классов и уже вышедшая в свет “Алгебра” составляют одно целое. Общие замечания о целях и задачах, изложенные в “Алгебре” на стр. 7—9, распространяются и на настоящую книгу; поэтому повторим их еще раз.

Книга написана в первую очередь для учителей 7–8-го классов, но не только для них. Она обращена и к учителям старшей ступени. Ее могут прочесть родители и школьники. Автор преподавал математику 25 лет в старших классах вальдорфской школы в Базеле и однажды работал в качестве классного учителя 8-го класса. Ему знакомы проблемы перехода из средней в старшую ступень и тот факт, что классные учителя в этот период стоят перед очень сложными задачами, разумеется, не только в математике, — но, может быть, здесь эти задачи особенно велики.

Поэтому я много консультирую учителей средней школы. С весны 1986 года я систематически прорабатывал с учителями вальдорфской школы Базеля материал математики. Мы смогли договориться об уроке в неделю и внести его в расписание заинтересованных учителей так, чтобы консультации стали регулярными. Было бы хорошо ввести такие часы во всех школах, поскольку большинство классных учителей чувствуют свою несостоятельность, оказавшись один на один перед математикой.

Но есть ведь и молодые школы, где учителя старших классов сами обладают еще очень скромным опытом. Поэтому-то я и решил написать данную книгу. Я передаю ее для коллегиальной работы классных учителей и предметников.

Я попытался изложить материал максимально понятным образом и не скупился на исчерпывающие примеры. И тем не менее встречаются главы, с которыми классному учителю лучше разобраться в диалоге со специалистом. Совместно можно обсудить также формулировки вопросов и постановку задач, не рассмотренные в книге.

Вообще, работа с данной книгой предполагает постепенность. В ней рассматривается не столько основной, неотъемлемый материал 7–8-го классов, сколько та общая перспектива, одним из элементов которой этот материал является. Эта перспектива постоянно проступает сквозь главы и параграфы. Ничто так не противоречит духу вальдорфской педагогики, как фиксация обязательной программы: когда говорится, какие задачи и как должны быть решены. Конечно, необходимо стремиться к овладению неким основным материалом; но помимо этого для каждого ученика (и учителя) должно быть достаточно возможностей развиваться так, как это позволяют его способности и потребности. Классный учитель может углубиться в книгу и пройти таким образом определенную математическую школу, которая даст ему возможность так излагать в классе материал, чтобы он вдохновлял учеников. Это в истинном смысле укрепит его авторитет — ученики заметят, что он не только владеет тем, что как раз сейчас рассказывает, но и говорит то или иное по своим, глубоким причинам. Естественно, эта цель не может быть достигнута вдруг. Требуется совместная работа классного учителя и специалиста. Если таковая происходит, то и специалист, в свою очередь, знает, насколько продвинулся классный учитель и как следует продолжать начатое. Оба, и классный учитель, и предметник, найдут в книге путеводную нить, ведущую из средней в старшую школу. Средняя школа должна опираться не только на младшие, но и на старшие классы.

Материал никогда не должен даваться в окончательной форме, изложение должно расти и изменяться от года к году —

как растут и изменяются ученики. Таково было глубочайшее желание Рудольфа Штейнера.

Поэтому в книге можно встретить главы, структура которых напоминает по стилю работу в старших классах,— но только напоминает. Понятия еще не доведены до предельной четкости, они пока только подготовлены и доступны переживанию. Учебный план Рудольфа Штейнера — это произведение искусства, возникшее из глубокого прозрения в развитие ребенка и подростка. И если он предлагал рассматривать в определенном возрасте определенный материал, значит, этот материал способен пробудить в ребенке силы, стремящиеся пробудиться в данном возрасте. Если же мы в нужный момент нечто упустим, то возникнет не просто глубокий пробел в знаниях ученика — ученик не сможет осуществить необходимые шаги в своем развитии. Упущенное невосполнимо, ибо меняется душевная конфигурация ребенка.

По поводу “Геометрии” стоит особо добавить следующее. Сердцевину ее составляет *теорема Пифагора*. И сегодня она дает ценнейший материал для упражнений, развивающих созерцательное мышление. В педагогических лекциях Рудольф Штейнер постоянно говорит об этой теореме. В его намерения входила основательная, проходящая красной нитью через несколько школьных лет проработка теоремы Пифагора. В простейшей форме (для равнобедренного треугольника) она может возникнуть еще на уроках рисования форм. В средней школе она рассматривается и углубляется с различных точек зрения, пока наконец в 10-м классе не находит своего завершения в теореме косинусов (см. гл.16).

Теорема может быть особенно глубоко пережита учениками, если в предшествующих рассмотрениях они приобрели ощущение и понимание *величины* и *формы*. Этому служат главы 1—6. В них возникают и *преобразования формы*. Они особенно развивают *подвижное представление*. К рассмотрению преобразования форм вальдорфские ученики наилуч-

шим образом подготовлены таким предметом, как рисование форм. На главном уроке возможна постоянная концентрированная работа. С другой стороны, сквозь всю книгу проходит стремление возбудить самостоятельную работу ученика. Учеников необходимо подвигнуть к *рисованию и рассмотрению*. Работая с чертежами, сделанными собственными руками, они пробуждают и культивируют в себе созерцательную силу суждения.

Именно в этом возрасте пробуждается сила суждения. Рудольф Штейнер придавал большое значение тому, чтобы эта сила суждения поднималась на крыльях *фантазии* (см. 14-ю лекцию цикла "*Общее учение о человеке*"). Сравнение фигур с помощью гномона и их преобразование смещением (гл. 2–4) вносят первый вклад в такое развитие. В упомянутой 14-й лекции *Общего учения о человеке* Рудольф Штейнер сам дал пример такой "фантазийной" формулировки. Он говорил о том, как можно покрыть квадрат гипотенузы и квадраты катетов слоем пыли. Ее для обеих поверхностей потребуется равное количество. Такой опыт возможен только в воображении. Но ясно, что имел в виду Рудольф Штейнер: ученики должны глубоко пережить качество фигур и равенство площадей. Если зимой подуть на холодное стекло, то возникающий налет дает сильное переживание поверхности. Но такая образная формулировка имеет, естественно, смысл только тогда, когда весь ход рассуждений уже освещен с геометрической стороны. Тогда такой образ как бы подытожит мысленное рассмотрение.

Важной стороной преподавания является упражнение. С теоремой Пифагора совершенно естественно связано извлечение квадратного корня. Поэтому я очень подробно — некоторые скажут, что, слишком подробно — рассмотрел эту операцию. Но не следует забывать: сознательно повторенное упражнение укрепляет волю. Ученик должен приобрести твердый вычислительный навык, прежде чем он перейдет к калькулятору. Я не советовал бы этого делать до 10-го клас-

са (до тригонометрии). Разумеется, в старших классах встречаются задачи, которые могут быть полностью выполнены только с помощью калькулятора. Но до тригонометрии все вычислительные задания вполне можно осилить и без него, — и извлечение корня не должно в этом смысле пройти мимо вашего внимания. Это прекрасная возможность культивировать умение самостоятельного счета. По этой причине я подробно выполнял некоторые вычисления (даже письменное умножение), в том виде, в каком, я полагаю, их должен проделывать ученик 7–8-го классов. Опыт показывает, что вычислительные навыки учеников с переходом к калькулятору заметно слабеют. Этот опыт заставил некоторых учителей математики отказаться от калькулятора вплоть до последних классов. Может быть, это “плавание против течения” — не настолько уж и обходной путь.

И в геометрии я пытался оставаться максимально понятным, не скупясь на поясняющие чертежи. Сложные рисунки приведены в поступенном развитии. Во всех случаях буквами помечены только те элементы, которые упомянуты в тексте и играют существенную роль в построении. На окончательных чертежах обозначения часто и вовсе отсутствуют; изобилие последних снижает образность, убедительность картинки.

“Геометрию”, как и “Алгебру”, я передаю в руки классных учителей с надеждой, что она будет способствовать более глубокому введению их в математику, станет подспорьем в работе и интенсифицирует совместную работу между учителями старших классов и классными учителями.

Арнольд Бернхардт

Предварительные замечания:

У учеников предполагаются следующие знания из 6-го класса:

1) Основные построения: деление отрезка и угла пополам, перпендикуляр из точки на прямую, серединный перпендикуляр к отрезку.
2) Сумма углов треугольника и четырехугольника.
3) Признаки конгруэнтности треугольников.
4) Основное свойство окружности (часто называемое в классической геометрии теоремой Фалеса).

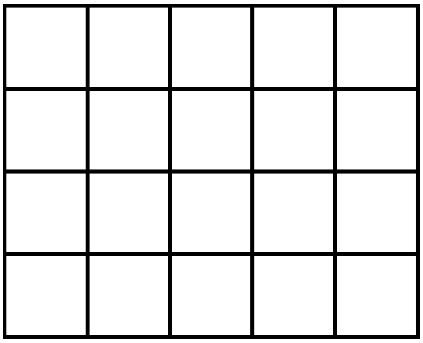
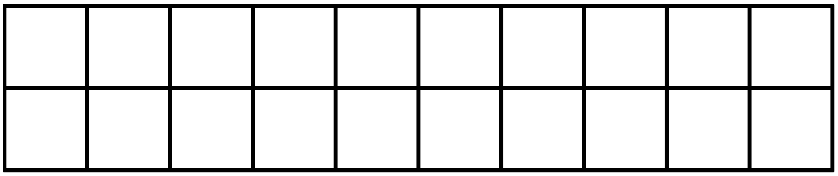


Рис. 1.1

Рис. 1.2



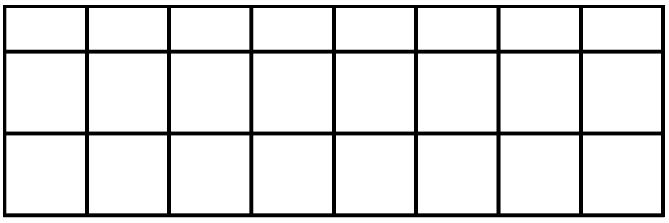


Рис. 1.3

1. Равновеликие прямоугольники — гномон (параллелограмм дополнения)

Преподавание геометрии в 7—8-м классах может строиться таким образом, что его кульминацией становится *теорема Пифагора*. О теореме Пифагора Рудольф Штейнер говорил в педагогических лекциях; основательное рассмотрение этой теоремы казалось ему чрезвычайно важным. Однажды он выразился в том смысле, что возможно за несколько уроков дать основные понятия, необходимые для теоремы Пифагора. Такую попытку он сделал однажды и сам, правда только в разговоре с некоей пожилой дамой, и, по воспоминаниям, содержание беседы стало для нее огромным переживанием. Но школьники смогут, конечно, глубже почувствовать ее, если на подготовительных эпохах на примерах многочисленных фигур отточат чувство и понимание равновеликости; ибо именно о *равновеликости* и идет речь в теореме Пифагора.

Сравним прямоугольники (рис. 1.1 и рис 1.2): у первого ширина и высота почти совпадают, второй гораздо шире. Несмотря на это, площадь у них одинакова; оба могут быть разделены на 20 квадратов с площадью 1 см^2. Такую же площадь имеет и прямоугольник на рис.3; каждые два маленьких прямоугольничка сверху дают в сумме 1 см^2, итого 20 см^2. Площади мы мерим с помощью *единицы площади*, например с помощью квадратного сантиметра. Если мы знаем ширину и высоту, то можем вычислить площадь; в наших примерах:

S_1 = 5 см · 4 см = 20 см^2
S_2 = 10 см · 2 см = 20 см^2
S_3 = 8 см · 2,5 см = 20 см^2

Часто ширина обозначается буквой *a*. Тогда, в общем случае: если ширина (основание) прямоугольника *a* см, а высота

h см, то площадь равна $a \cdot h$ см^2. В виде формулы:

$$S = a \cdot h$$

Словами: площадь прямоугольника равна основанию, умноженному на высоту.

В ряде случаев стороны прямоугольника обозначаются как: длина — более длинная сторона и ширина — более короткая. Формула для площади в этом случае: $S = l \cdot b$. На наших рисунках прямоугольники всегда расположены таким образом, что одна сторона горизонтальна, другая вертикальна; мы ощущаем их при этом как ширину (или основание) и высоту. Отсюда и названия.

Мы рассмотрели три прямоугольника с площадью 20 см^2. Можно ли обозреть все прямоугольники с такой площадью? Сколько их? На этот вопрос мы ответим в конце главы.

Для получения равновеликих фигур существует конструкция, так называемый *гномон*, которую можно построить, исходя из произвольного прямоугольника (рис. 1.4 и 1.5). В прямоугольнике (рис. 1.4) мы проводим диагональ: она делит прямоугольник на два конгруэнтных треугольника, то есть таких треугольника, которые, будучи вырезаны, могут быть наложены друг на друга и при этом их границы *совпадут*; эти треугольники *равновелики* и имеют *равную форму*. Именно такие фигуры мы называем *конгруэнтными* (совпадающими при наложении). Прямоугольники на рис. 1.1—1.3 равновелики, но не конгруэнтны: их форма различна, ближе или дальше от формы квадрата.

На диагонали (рис. 1.4) выберем точку P и проведем через нее прямые, параллельные сторонам (рис. 1.5). Прямоугольник делится при этом на два прямоугольника и четыре треугольника. У обоих прямоугольников — R_1 и R_2 — мы определим площадь: измерим основания и высоты, перемножим и, смотри-ка, площади равны!

Всегда ли это так? Возьмем, в качестве исходного, другой прямоугольник (рис. 1.6 и 1.7). Разумеется, основания

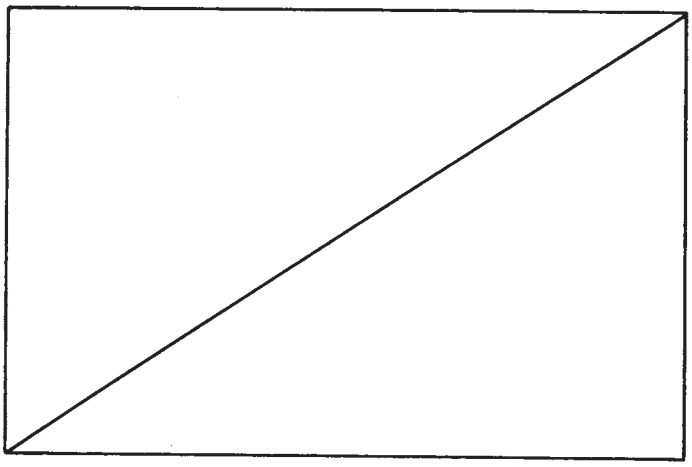


Рис. 1.4

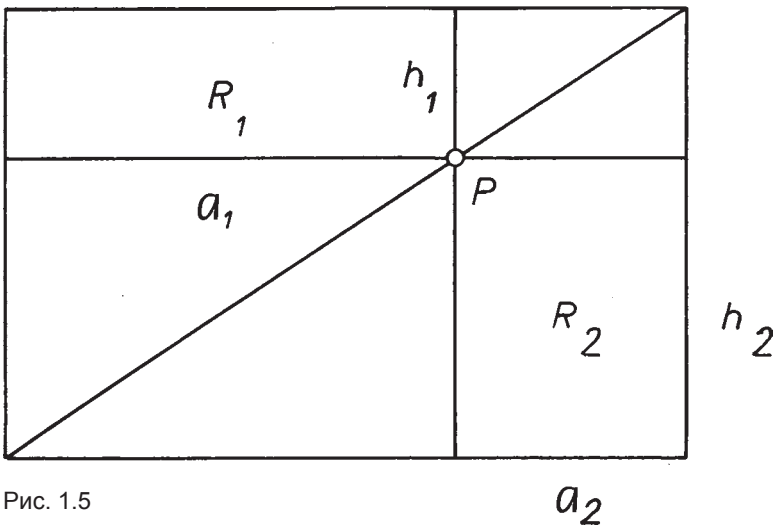


Рис. 1.5

$a_1 = 6$ см $h_1 = 2$ см $R_1 = 12$ см^2

$a_2 = 3$ см $h_2 = 4$ см $R_2 = 12$ см^2

и высоты не всегда будут целочисленными (рис.1.6). На миллиметр мы можем ошибаться (рис. 1.7). Если длина основания между 5,2 и 5,3 см, то, может быть, мы можем разглядеть, что она ближе к 5,3; тогда мы выберем эту величину. Если нам кажется, что конец отрезка расположен точно посередине между делениями, мы можем остановиться на 5,25 см. Перемножив, мы увидим, что площади обоих прямоугольников незначительно различаются! Но только незначительно! Вероятно, их площади все же равны? Основания и высоты мы никогда не измерим абсолютно точно, а значит, и площади с полной точностью вычислить не сможем. На этом пути мы не придем к уверенности, равновелики прямоугольники или нет.

Существует ли надежный путь? Да, и даже без вычислений! Рассмотрим еще раз рис.1.7. Диагональ АС делит на два конгруэнтных треугольника не только весь прямоугольник, но и маленькие прямоугольники в левом нижнем и правом верхнем углах. На рисунке появляются пары конгруэнтных (и, естественно, равновеликих) треугольников: пара больших, пара средних и пара маленьких. Если из большого треугольника вычесть средний и маленький — получится прямоугольник. Обозначим площади больших треугольников G_1 и G_2, средних M_1 и M_2, маленьких K_1 и K_2. Тогда можно определить площади прямоугольников:

$$R_1 = G_1 - M_1 - K_1$$
$$R_2 = G_2 - M_2 - K_2$$

Поскольку треугольники равновелики ($G_1 = G_2$ $M_1 = M_2$ $K_1 = K_2$), то и прямоугольники также должны быть равновелики ($R_1 = R_2$).

Эти рассмотрения убеждают нас в том, что и площади обоих прямоугольников в любом случае равны.

Естественно, вместо диагонали *AC* мы могли бы с тем же успехом использовать диагональ *BD* и выбрать на ней точку *P*.

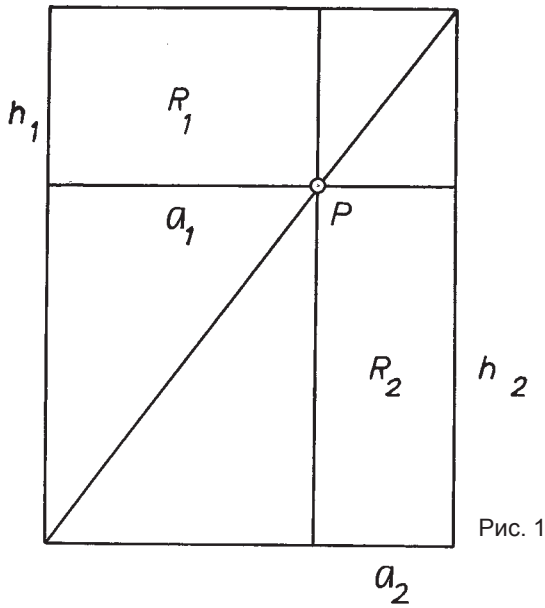
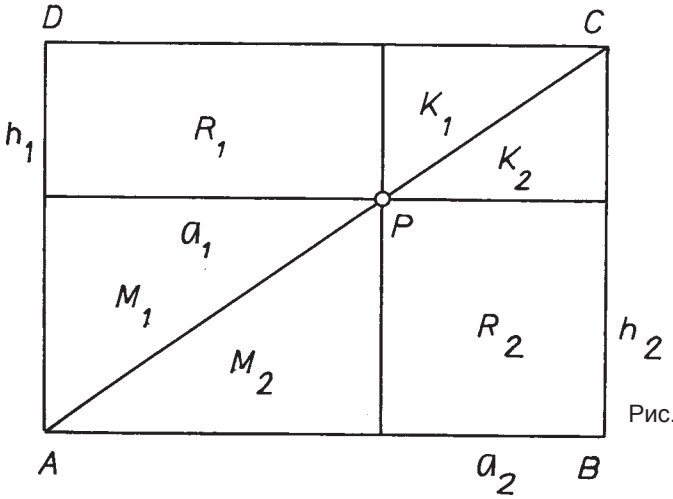


Рис. 1.6

a_1 = 4,2 см h_1 = 2,8 см R_1 = 11,76 см^2

a_2 = 2,1 см h_2 = 5,6 см R_2 = 11,76 см^2



$G_1 = \Delta ACD$

$G_2 = \Delta ABC$

Рис. 1.7

a_1 = 5,3 см h_1 = 2,4 см R_1 = 12,72 см^2

a_2 = 3,5 см h_2 = 3,7 см R_2 = 12,95 см^2

С помощью гномона можно для любого прямоугольника сконструировать равновеликий с заданной стороной (рис. 1.8, 1.9 и 1.10).

Рис. 1.8: Пусть R_1 — данный прямоугольник, g_2 — заданная сторона искомого равновеликого прямоугольника. Дорисуем к R_1 прямоугольник с основанием g_2 и высотой h_1. В достроенном прямоугольнике проведем диагональ CP, продлим ее влево вниз за точку P и найдем точку ее пересечения с продолжением стороны h_1 (рис.1.9). Полученная точка A будет левым нижним углом большого гномона; пользуясь ею, мы можем дополнить рисунок направо и найти равновеликий прямоугольник R_2. Эта задача является ключевой для темы “Равновеликие прямоугольники”[1].

В заключение ответим на вопрос: как обозреть все множество прямоугольников, равновеликих данному прямоугольнику R (рис. 1.11)? Нарисуем прямоугольник R справа внизу и продлим налево основание g и вверх высоту h. Его верхняя левая вершина будет играть роль P. Через P наискось будем проводить диагонали, например d_1. Эта диагональ пересекает продолжение основания в точке A_1 и продолжение высоты в точке C_1. Через A_1 проведем вертикаль, через C_1 — горизонталь; прямые пересекутся в D_1. Получится гномон, левый верхний прямоугольник которого равновелик данному прямоугольнику R. Теперь мы можем вращать диагональ против часовой стрелки вокруг P: точки A перемещаются по прямой основания направо, C — по высоте вверх: а точки D? По кривой! Ее левая

[1] Из–за проделанного построения фигура названа *параллелограммом дополнения*.

По поводу названия “гномон”: “гномон” буквально означает “узнаватель”; так в Греции называли жезлы солнечных часов. По тени от них можно было узнать время. Они монтировались на площадке в форме угла — одно плечо на земле, другое — вертикально. На нашем рисунке гномоном называется угловатая фигура, которая возникает, если от большого прямоугольника отнять один из маленьких угловых прямоугольников, лежащих на диагонали. Гномонами являются и все угловые фигуры на рис. 2.1 в “Алгебре” (см. стр. 25) автора.

Рис. 1.8

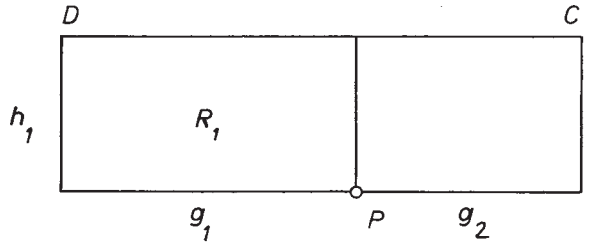


Рис. 1.9

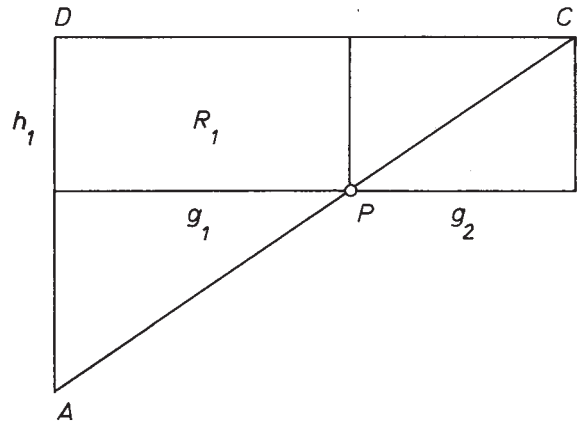
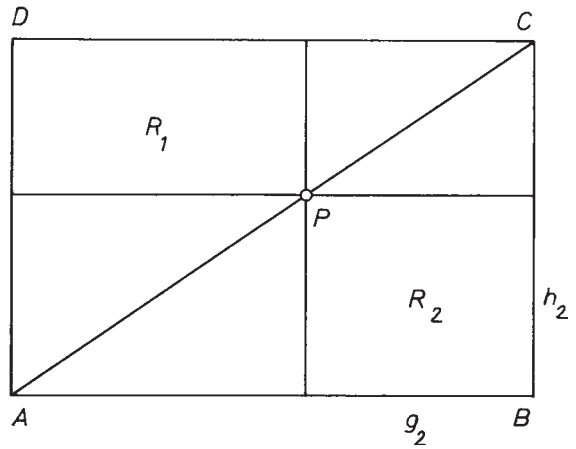


Рис. 1.10



часть полога, а правая круто взлетает вверх. Такую кривую называют *гиперболой*. Ученики подробнее знакомятся с ней в старшей школе: сперва в 9-м классе, затем в проективной геометрии, где эта кривая естественно возникает, и, кроме того, на уроках аналитической геометрии. Для нас важно, что все прямоугольники, правая нижняя вершина которых расположена в P, одна сторона — на горизонтали w, другая — на вертикали s, а вершина D — на построенной гиперболе, равновелики R. Представим себе, как D пробегает гиперболу слева снизу направо наверх: сперва прямоугольники широки и низки, затем они становятся постепенно уже и выше и вдруг взмывают вверх — оставаясь все время равновеликими! Прямоугольник с вершиной D_1 (широкий и низкий) имеет большой периметр; прямоугольник с вершиной D_2 хотя и выше, но его ширина заметно меньше, то есть меньше периметр. Что же, периметр все время убывает? Нет, у узких и высоких прямоугольников периметр снова растет; причем чем они уже, тем больше! В промежутке должен встретиться прямоугольник с наименьшим периметром! Ответ угадывается: особый прямоугольник, ширина которого равна высоте, — квадрат! Сторону его мы, правда, не можем пока определить точно; но позже мы вернемся к этой проблеме[1]. Мы можем, естественно, построить биссектрису угла с вершиной P и сторонами w и s и пересечь ее с гиперболой — точка пересечения D будет вершиной квадрата. Но такой путь не отвечает всем требованиям точного построения[2].

Итак, среди всех равновеликих прямоугольников существует один с наименьшим перим130130130130тром; в 12-м классе приводится строгое доказательство этого положения. Существует ли прямоугольник с наибольшим периметром?

[1] В главах 12,13.

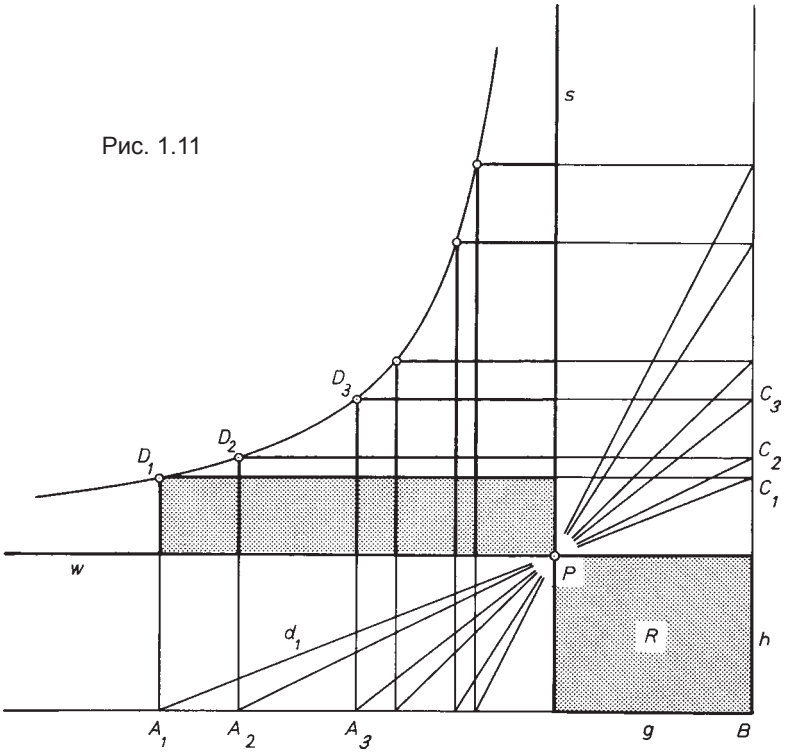
[2] Построение мы называем точным, если мы работаем циркулем и линейкой, то есть прямые и окружности пересекаются с прямыми и окружностями (но не с гиперболами).

Нет! Если *D* движется все дальше и дальше налево по гиперболе, то основание растет бесконечно. При движении направо неограниченно растет высота. То есть периметр может быть сколь угодно большим!

Задачи на гномон

1. Проведи в прямоугольнике с основанием *g*=12 см и высотой *h*= 6 см диагональ *AC*; выбери на диагонали точку *P* на

Рис. 1.11



расстоянии 2, 4, 6, 8, 10 см от *A* и, измеряя и вычисляя, определи площадь R_1 и R_2. Сведи величины оснований, высот и площадей в таблицу. Чем точнее чертеж (остро отточенный карандаш, вертикали и горизонтали действительно параллельны друг другу и углы между ними прямые), тем точнее будут соответствовать друг другу площади R_1 и R_2.

AP ñì	g_1 ñì	h_1 ñì	R_1 ñì	g_2 ñì	h_2 ñì	R_2 ñì
2	1,8	5,1	9,18	10,2	0,9	9,18
4						
6						
8						
10						

2. Опиши, как меняются форма и размеры прямоугольников R_1 и R_2 при движении *P* от *A* к *C*.

3. Куда поместить *P*, чтобы R_1 и R_2 были наибольшими? Измерь и вычисли!

4. При прослеживании, как меняется форма прямоугольников при движении *P* от *A* к *C*, возникает вопрос: не могут ли R_1 и R_2 стать квадратами? Где приблизительно должна лежать *P*, чтобы R_1 и R_2 превратились в квадраты? Нельзя ли точно определить два особых, выделенных положения *P*? (В конце этой главы можно найти указание на ответ.)

5. Как меняется гномон, если начать не с прямоугольника, а с квадрата? В чем тогда особенность R_1 и R_2?

6. Сколько всего прямоугольников в гномоне, в том числе

взаимопересекающихся? Какие из них равновелики?

7. Построй гномон, исходя из параллелограмма. Начерти диагональ *AC*, выбери точку *P*, через нее проведи прямые, параллельные сторонам. Узнаёшь? Попробуй перенести на случай параллелограмма рассуждения, сопутствующие рис.7.

8. С помощью гномона для параллелограмма со сторонами 8 и 4 см и углом $\alpha = 60°$ построй равновеликий параллелограмм с основанием 5 см и тем же углом.

9. По аналогии с рис.11 найди вершины всех параллелограммов, равновеликих данному *P*, с одним и тем же углом.

2. Смещение – процесс, меняющий форму, но не площадь фигуры

Смещение прямоугольника и параллелограмма

Представим себе: на столе друг на друге складированы одинаковые доски (рис. 2.1). Если смотреть сбоку, доски лежат прямоугольником. Приподнимем левый край стола так, чтобы доски начали скользить друг по другу, совершенно равномерно (рис.2.2).

Нижняя доска пусть останется в первоначальном положении. Доски заполнят своего рода параллелограмм, правда с

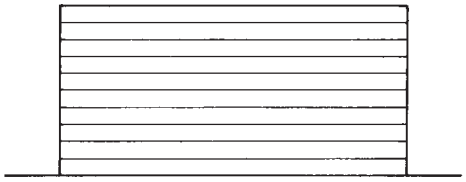


Рис. 2.1

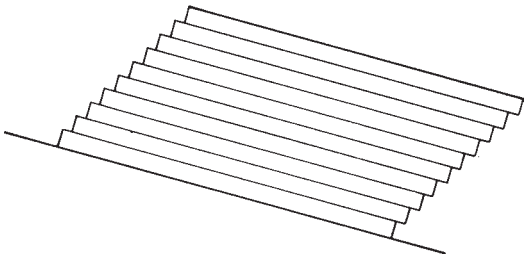


Рис. 2.2

зубчатым краем. Общая площадь при этом будет совпадать с площадью прямоугольника, поскольку площади слоев не изменились.

Чем тоньше доски, тем меньше зубцы на краях, тем меньше отличий от настоящего параллелограмма. Представим себе, что все вышеописанное происходит не с досками, а со стопкой бумаги; слои настолько тонки, что края будут практически гладкими и фигура — почти точным параллелограммом.

Нам вообще нет нужды представлять себе видимые предметы. Помыслим бесконечное количество геометрически бесконечно тонких слоев. Тем самым мы переходим к свободному от чувственного чистому мышлению. Основание — нижний неподвижный слой — может лежать горизонтально или как-либо наклонно. Слои приводятся в движение уже не силой тяжести, а силой воображения, активного воображения. Скорость скольжения мы согласовываем таким образом, чтобы правый и левый края при движении оставались прямыми, то есть слои, лежащие почти на основании, скользят медленнее, лежащие выше — быстрее. Такое движение называется *смещением*. Прямая, на которой лежит нижний слой, называется *осью смещения z*.

Смещение — непрерывный, текучий процесс, который может проходить в обоих направлениях вдоль оси как угодно далеко, при этом форма параллелограмма постоянно меняется. На рис. 2.3—2.7 представлены стадии преобразования, все сильнее сдвигающие слои и искривляющие параллелограмм. Но площадь остается всегда одинаковой! Ибо ровно столько, сколько прибавляется справа, теряется слева! Треугольники между начальным и конечным параллелограммом (заштрихован всегда конечный) конгруэнтны. Горизонтальные прямые штриховки суть некоторые редкие представители бесконечно многих, бесконечно тонких, мысленных слоев.

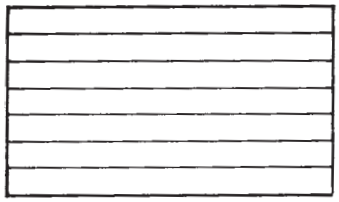


Рис. 2.3

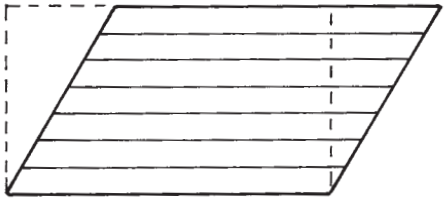


Рис. 2.4

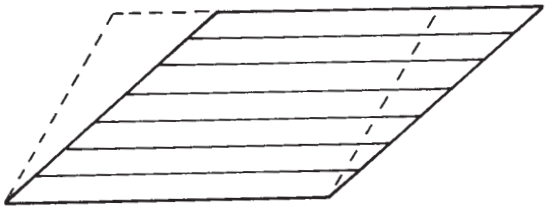


Рис. 2.5

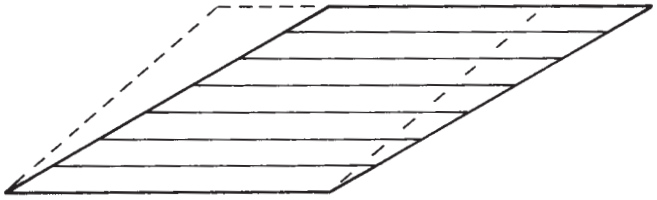


Рис. 2.6

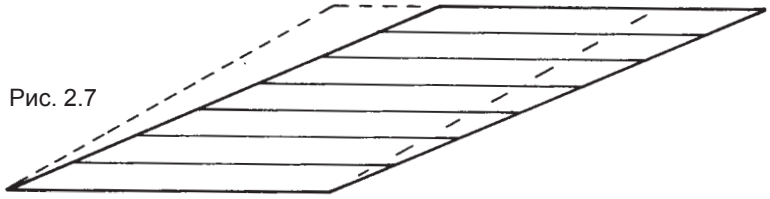


Рис. 2.7

Кроме площади постоянными остаются основание и высота (высота равна расстоянию между нижним и верхним слоем). Таким образом, площадь параллелограмма может быть вычислена по той же формуле, что и площадь прямоугольника

$S = g \cdot h$

Формулировка: Площадь параллелограмма — основание, умноженное на высоту.

Теперь с помощью смещения решим три важных задачи.

Задача 1: Преобразовать данный прямоугольник с основанием *g* и высотой *h* в равновеликий параллелограмм с тем же основанием и стороной *s* (рис. 2.8).

Решение: Проведем окружности с центрами в вершинах *A*

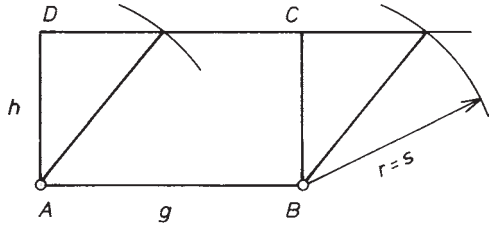


Рис. 2.8

и *B* и радиусом *s* и пересечем их (продолженной) стороной *DC*.

Задача 2: Пририсуй к заданному прямоугольнику равновеликий параллелограмм с тем же основанием и углом α=60° (рис. 2.9).

Решение: Строим в вершинах *A* и *B* по углу 60°, одна сто-

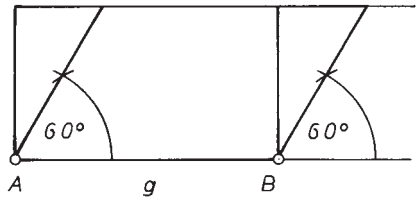


Рис. 2.9

рона которых — основание.

Задача 3: Пририсуй к прямоугольнику R_1 с основанием g_1 и высотой h_1 равновеликий прямоугольник с заданным основанием g_2 (рис. 2.10).

Решение: Сперва смещаем заданный прямоугольник в на-

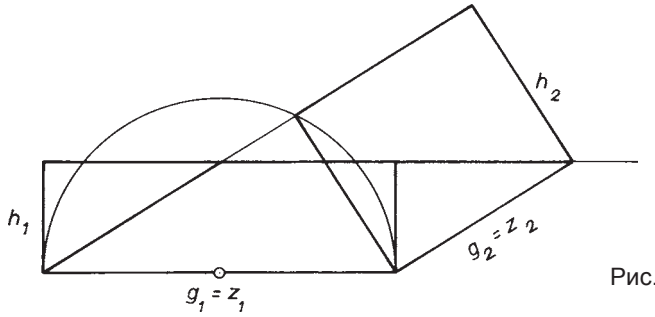


Рис. 2.10

правлении оси z_1 (получаем параллелограмм, у которого вторая сторона = g_2). Затем смещаем этот параллелограмм в направлении оси z_2', пока h_2 не окажется перпендикулярной g_2. (Построение может быть выполнено без приведенной на рисунке окружности; нужно просто построить перпендикуляр к g_2. Она служит, однако, указанием к решению упражнения 5).

Можно ли перевести друг в друга смещением два равновеликих прямоугольника R_1 и R_2 из гномона? Вот решение, включающее в себя четыре шага:

1-й шаг (рис.2.11): R_1 смещается в направлении оси z_1=AB, превращаясь в параллелограмм, примыкающий к диагонали d.

2-й шаг (рис.2.12): Полученный параллелограмм смещается в направлении оси z_2=BC, пока две стороны не окажутся в вертикальном положении? Обратим внимание, что их длина равна h_2. Почему? Высота h_2 прямоугольника R_2 может быть

сперва параллельно перенесена на левый край, а затем направо вверх в направлении диагонали.

3-й шаг (рис.2.13): Второй параллелограмм сдвигается вниз, пока его сторона не совпадет с h_2.

4-й шаг (рис.2.14): Сдвинутый параллелограмм смещается вдоль оси z_3=*BD* до прямоугольника R_2.

Тем самым мы не просто убедились в равновеликости R_1

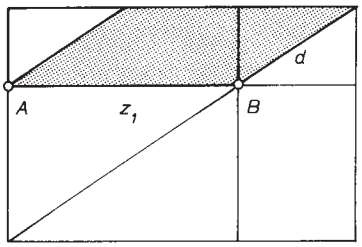


Рис. 2.11

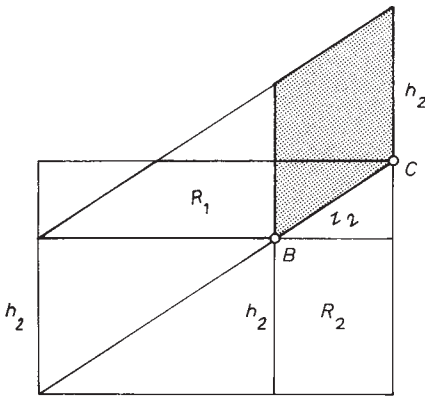


Рис. 2.12

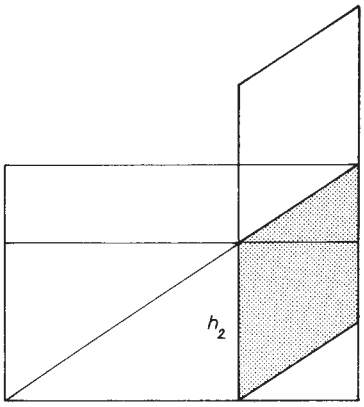


Рис. 2.13

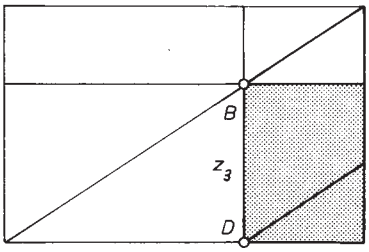


Рис. 2.14

и R_2 (как в главе о гномоне), но преобразованиями, сохраняющими площадь, перевели R_1 в R_2. (Преобразование назовем *сохраняющим площадь*, если оно не меняет площади фигур.)

С помощью разрезания и перегруппировки частей можно другим путем убедиться в том, что сильно искривленный параллелограмм (рис. 2.15) все же равновелик прямоугольнику с тем же основанием и высотой. Разрежем параллелограмм вдоль диагонали *BD* на два конгруэнтных треугольника. Правый треугольник перенесем налево, чтобы сторона *BC* совпадала с *AD*. Получим новый параллелограмм с диагональю *AD* (рис. 2.16). Его мы разрежем вдоль вертикали, проходящей через *B*, и перенесем правый треугольник (состоящий уже из двух кусков) налево так, что его сторона *BD* совпадет с *AE*. Получится прямоугольник с прежним основанием и высотой (рис.2.17). Исходный параллелограмм мы разрезали на четыре части и так перекомпоновали их, что возник прямоугольник (рис.2.17,2.18). Это не внутреннее преобразование всей фигуры, как в случае смещения (рис.2.3–2.7), это внешняя перестройка. Но при этом ясно видна равновеликость. Такая перестройка может быть выполнена с помощью картона, ножниц и клея.

Она же возможна и для прямоугольников R_1 и R_2 из гномона. Правда, наугад подходящие части вряд ли отыщутся. Но рис. 2.11—2.14 содержат подсказку: можно перестраивать постепенно. При переходе от рис. 2.11 к рис. 2.12 важную роль играют диагональные разрезы.

Задачи

1. Построй для прямоугольника с основанием g=6 см и высотой h=4 см равновеликий ромб со стороной 6 см.

2. Построй для прямоугольника с основанием g=8 см и высотой h=4 см равновеликий ромб со стороной 6 см (два

смещения).

3. Дан прямоугольник с основанием g=3 см и высотой h=7 см. Построй равновеликий параллелограмм со сторонами 7 и 4 см.

4. Построй для параллелограмма со сторонами 8 и 4 см и углом α=60° равновеликий параллелограмм со стороной 6 см и углом 45° (два смещения).

5. Построй для прямоугольника со сторонами 7 и 4 см равновеликий прямоугольник, одна сторона которого равна 3 см (два смещения; в задаче 3, стр.28 содержится указание на решение).

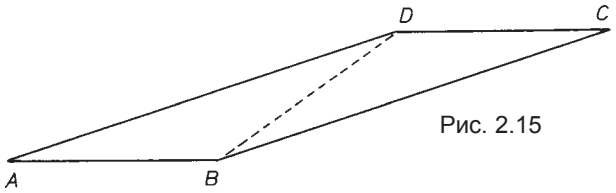


Рис. 2.15

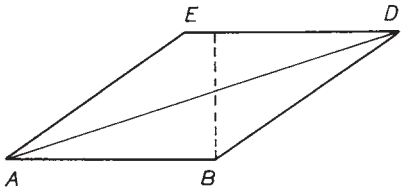


Рис. 2.16

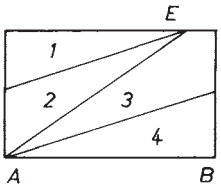


Рис. 2.17

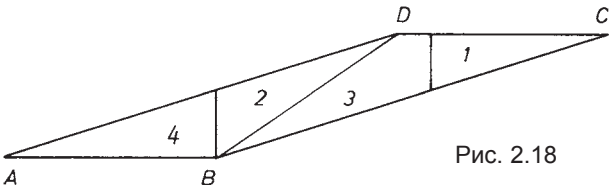


Рис. 2.18

3. Смещение треугольников — вершина движется параллельно основанию

Смещать можно не только прямоугольники и параллелограммы, но и треугольники. С помощью последних можно проделывать особенно много преобразований, сохраняющих площадь. Выведем смещение треугольника из смещения прямоугольника: в прямоугольнике *ABCD* (рис. 3.1) проведем диагональ *AC* и представим себе правый треугольник *ABC* разделенным на слои. Затем проведем смещение: слои будут смещаться, оставаясь всегда слоями треугольника. Основание останется неподвижным, вершина сдвинется параллельно основанию (рис. 3.1—3.4). Смещение, естественно, можно провести и в другом направлении (рис. 3.5—3.9). Площадь треугольника сохраняется, поскольку в любой момент она равна половине площади прямоугольника, которая всегда постоянна (см. предыдущую главу).

Сведем различные стадии в один чертеж (рис. 3.10) и мысленно будем смещать треугольник шаг за шагом. Хотя форма постоянно меняется, площадь остается прежней.

Формулировка: Если вершина треугольника движется параллельно основанию, площадь не меняется.

Назвав расстояние между основанием и параллельной прямой, проходящей через вершину, *высотой* треугольника, получим

Формулировка: Треугольники с равными основаниями и высотами равновелики.

Поскольку треугольники на рис. 3.1—3.9 вполовину меньше соответствующих прямоугольников, можно вычислить их площадь по формуле:

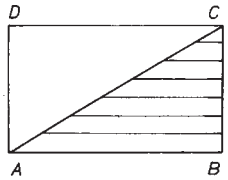


Рис. 3.1

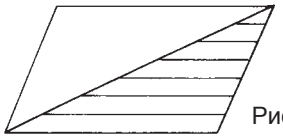


Рис. 3.2

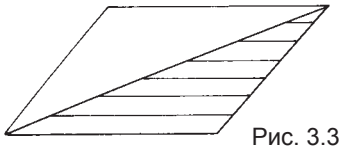


Рис. 3.3

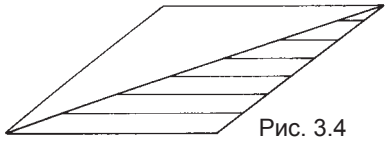


Рис. 3.4

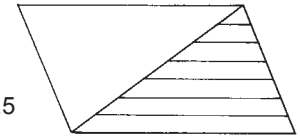


Рис. 3.5

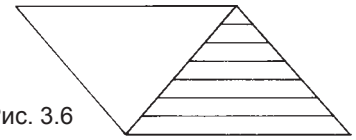


Рис. 3.6

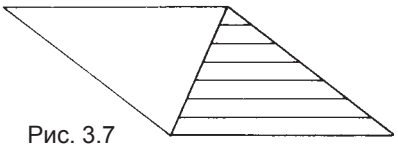


Рис. 3.7

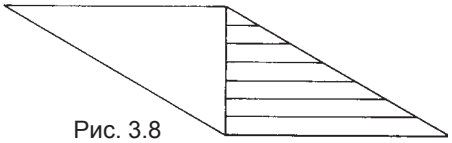


Рис. 3.8

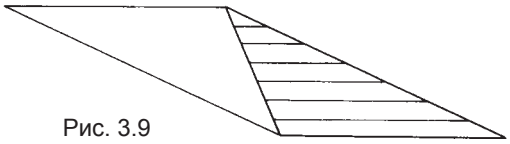


Рис. 3.9

$S = {}^1/_2 \cdot g \cdot h =$

Формулировка: Площадь треугольника равна основание на высоту пополам.

Но ведь роль основания может взять на себя любая сторона треугольника — к любой стороне можно провести через

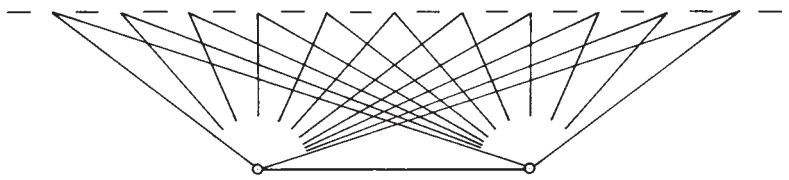


Рис. 3.10

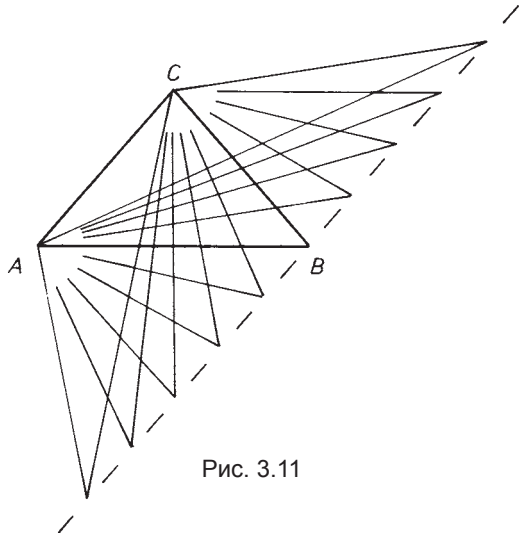


Рис. 3.11

противоположную вершину параллельную прямую и сместить затем вдоль нее вершину: все полученные прямоугольники будут равновелики (рис. 3.11).

Значит, площадь треугольника может быть вычислена с помощью любой из трех сторон в качестве основания; она должна быть только умножена на нужную высоту — отрезок перпендикуляра через противоположную вершину (рис.3.12). Итак, для площади треугольника верны 3 формулы:

$F =$ $\quad =$ $\quad =$

Каждую высоту мы снабдим нижним индексом (сторона, ко-

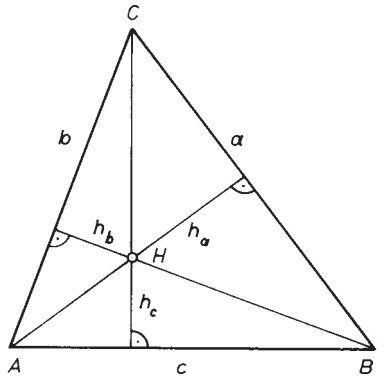


Рис. 3.12

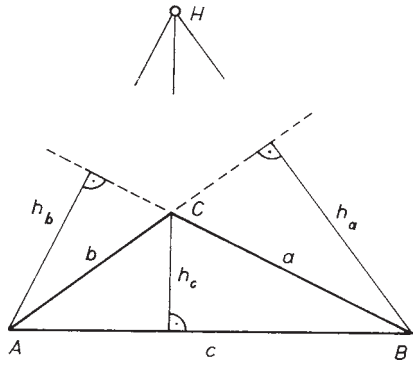


Рис. 3.13

торой она перпендикулярна). Испробуйте эти три формулы на треугольнике со сторонами *a*=14 см, *b*=15 см, *c*=13 см (задание 6). Стройте и измеряйте с максимальной точностью!

Три высоты всегда пересекаются в одной точке *H* (доказательство см. в Приложении). В остроугольном треугольнике *H* лежит внутри треугольника (рис.3.12), в тупоугольном — снаружи (рис.3.13). А в прямоугольном треугольнике (задание 7)? С помощью смещения можно решить множество задач на преобразования. Рассмотрим три примера:

Пример 1 (рис.3.14): Построй треугольник *ABC* со сторо-

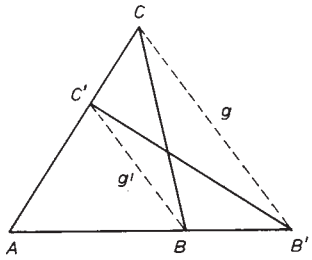
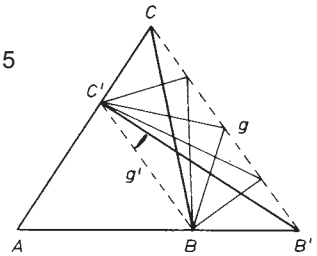


Рис. 3.14

Рис. 3.15



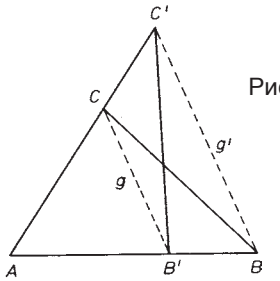


Рис. 3.16

нами c=5 см, a=6 см, b=7 см; продли основание AB до 8 см (AB') и найди равновеликий треугольник с новым основанием AB'.

Решение: Соединим точки B' и C (прямая g) и через B проведем прямую g', параллельную ей. C' — точка пересечения g' и b — является вершиной такого равновеликого треугольника. Почему? Рассмотрим треугольники $C'BC$ и $C'BB'$. У них общее основание, и вершина C может сместиться параллельно основанию g' в точку B'. Таким образом, треугольники равновелики. На рис.3.15 показаны некоторые стадии этого смещения. Треугольник $C'BC$ мы можем представить себе отрезанным от исходного треугольника ABC; к остатку (треугольник ABC') мы присоединим в конце концов равновеликий треугольник $C'BB'$ — то есть площадь в итоге не изменилась. Чтобы получить все равновеликие треугольники с основанием AB', доста-

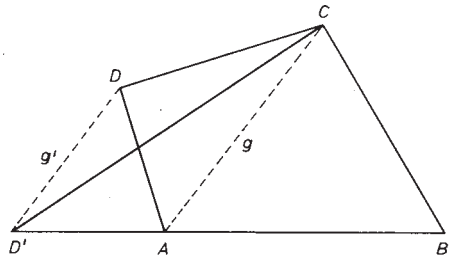


Рис. 3.17

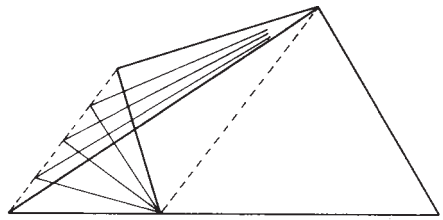


Рис. 3.18

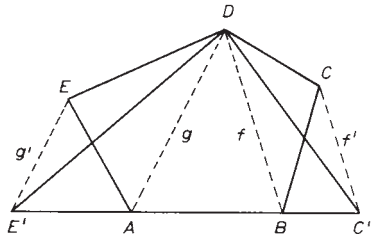


Рис. 3.19

точно смещать *C′* параллельно этому основанию.

Пример 2 (рис.3.16): Нарисуй треугольник со сторонами *c*=7 см, *a*=6 см, *b*=5 см и укороти основание до *AB′*=4 см. Найди равновеликий треугольник с этим новым основанием. Решение в принципе совпадает с решением Примера 1.

Пример 3 (“спрямление углов”): рис. 3.17 показывает, как данный четырехугольник *ABCD* смещением треугольников

может быть преобразован в равновеликий треугольник. Проведем диагональ $g=AC$ и к ней параллельную прямую g' вниз, пока она не окажется на продолжении стороны AB; получим новый угол D'. Тем самым угол A “спрямлен”. Треугольник $D'BC$ равновелик исходному четырехугольнику. Полезно представить себе не только конечную форму, но и весь ряд превращений треугольника ACD в треугольник ACD' (рис.3.18). “Спрямлением углов” можно превратить в треугольник любой многоугольник. (На рис. 3.19 это сделано для пятиугольника.)

Равновеликость треугольников с равными основаниями и высотами можно установить и перестройкой: а именно любой такой треугольник можно превратить в прямоугольник с прежним основанием и половинной высотой (рис. 3.20—3.27).

Проведем высоту и среднюю линию M_aM_b (рис. 3.20). Затем разрежем треугольник вдоль полученных линий. Два треугольника при вершине можно провернуть вниз вокруг M_a и M_b (рис. 3.21).

Особенно проста перестройка прямоугольного треугольника, когда вершина C лежит точно над A или B (рис. 3.22, 3.23).

Но и в случае “вытянутого” треугольника перестройка возможна (рис. 3.24). Сперва разрез вдоль средней линии, затем поворот верхнего треугольника вокруг M_b. В заключение разрез вдоль вертикали через B и перенос правого кусочка налево (рис. 3.25). Итак, прямоугольник составляется из 3 кусков (рис. 3.26).

Хорошее упражнение — точно представить себе поворот треугольника вокруг середины сторон M_a и M_b. Лучше всего нарисовать траектории вершин и промежуточные положения треугольника после поворота на 60° и 120° (или 45°, 90°, 135°). (На рис. 3.28 это проделано для прямоугольного треугольника. Повороты на 60° и 120° строятся особенно легко, нужно только отложить радиус на соответствующей окружности.)

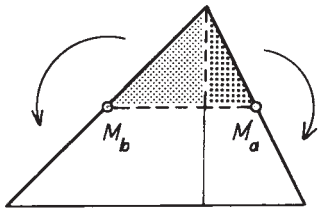


Рис. 3.20

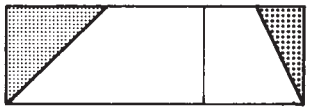


Рис. 3.21

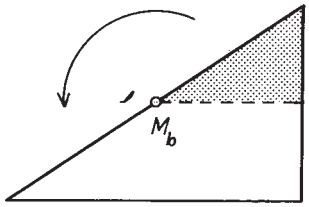


Рис. 3.22

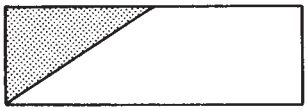


Рис. 3.23

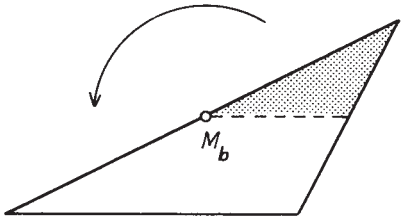


Рис. 3.24

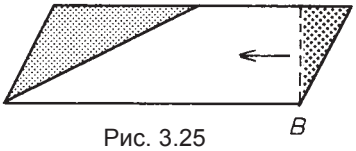


Рис. 3.25

Рис. 3.26

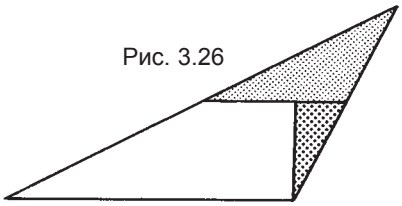
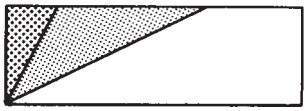


Рис. 3.27



Задачи к теме: “Смещение треугольников”

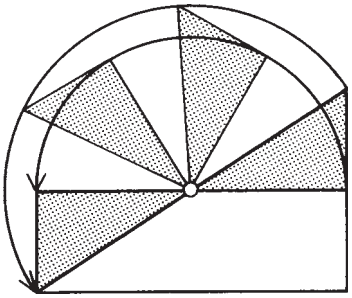


Рис. 3.28

1. Построй треугольник *ABC* со сторонами *c*=6 см, *a*=4 см, *b*=5 см. Представь себе, что вершина *C* движется параллельно основанию налево и направо. Нарисуй *все* возникающие *равнобедренные* равновеликие треугольники с основанием *c*=*AB*; *AB* необязательно основание — оно может быть и боковой стороной равнобедренного треугольника. Сколько существует таких треугольников?

2. Построй для треугольника *ABC* со сторонами *c*=8 см и *a*=*b*=5 см *все* равновеликие *прямоугольные* треугольники, у которых одна сторона *c*=*AB*. Сколько их?

3. Построй треугольник *ABC* со сторонами *c*=6 см, *a*=5 см, *b*=7 см. Продли основание *AB* до *AB′*=8 см (пример 1). Построй равновеликий треугольник со стороной *AB′* и с прямым углом при вершине *A*.

4. Построй треугольник *ABC* со сторонами *c*=5 см, *a*=6 см, *b*=10 см. Продли основание *AB* до *AB′*=8 см и построй равновеликий равнобедренный треугольник, у которого *AB′* —

основание.

5. Построй треугольник *ABC* со сторонами *c*=10 см, *a*=*b*=8 см. Уменьши основание *AB* до *AB′*=7 см (пример 2). Построй равновеликий равнобедренный треугольник, у которого *AB′* — основание.

6. Максимально точно нарисуй треугольник со сторонами *c*=13 см, *a*=14 см и *b*=15 см и три его высоты. Измерь высоты, вычисли площадь тремя способами (для каждой пары основание — высота). То же самое для *c*=10,5 см, *a*=8,5 см, *b*=5 см.

7. Где находится точка пересечения высот прямоугольного треугольника? Во что превращаются в этом случае формулы:

F= и *F*= ?

Следующие треугольники прямоугольные (причины мы узнаем в одной из следующих глав). Через площадь вычислим высоту *hc* (в двух случаях — точно). Измерь в сантиметрах:

a	*b*	*c*
8	6	10
5	12	13
8	15	17

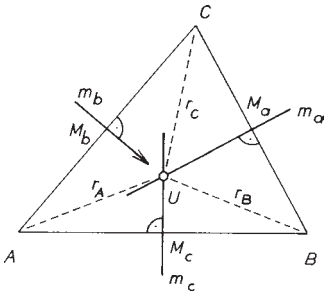
8. В связи с рис.3.28 построй промежуточные треугольники при повороте на угол 45°, 90°, 135°. Лучше всего начать с 90°!

Приложение

Почему три высоты треугольника пересекаются в *одной* точке?

Вначале докажем, что в одной точке пересекаются три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника: в треугольнике на рис.3.29 построены два серединных перпенди-

Рис. 3.29



куляра m_c и m_a; точку их пересечения назовем U. U равноудалена от обеих вершин A и B (r_a=r_b), поскольку U лежит на m_c. Ведь серединный перпендикуляр — это геометрическое место всех точек, равноудаленных от точек A и B. Поскольку U лежит на m_a, она равноудалена от B и C (r_c=r_b). Из r_a=r_b и r_c=r_b следует, что r_a=r_c, то есть U равноудалена от A и C. Но все точки, обладающие таким свойством, лежат на m_b. Следовательно, U — центр описанной окружности.

Такой ход рассуждений чрезвычайно подходит в 7-м и 8-м классах для упражнения причинно–следственного мышления. Подобные сюжеты упускать нельзя. Они укрепляют силу суждения.

Представим ход рассуждений в наиболее лаконичной форме:

r_a=r_b, поскольку U лежит на m_c;
r_b=r_c, поскольку U лежит на m_a.

Итак, r_c=r_a, следовательно, U лежит на m_b.

Переход к высотам. Через вершины A, B, C треугольника (рис. 3.30) ~~проведем прямые a',b',c', параллельные~~ сторонам a, b и c. Получится новый треугольник $A'B'C'$ большего размера. Вершины малого треугольника являются *серединами сторон* большого. (Это вытекает из конгруэнтности 4 малых треугольников.) Таким образом, высоты треугольника ABC (рис. 3.31) являются серединными перпендикулярами в

треугольнике *A′B′C′*. Поэтому они должны пересекаться в одной точке (в точке пересечения высот *H*). Для треугольника *A′B′C′ H* — центр описанной окружности.

4. Смещение как процесс на всей плоскости

Внимательнее рассмотрим смещение прямоугольника — проследим, как движутся его точки, сперва крайние (рис.4.1). Крайние точки, расположенные на одинаковой высоте слева и справа, проходят одно и то же расстояние — одинаковые векторы. Но так же движутся и внутренние точки, лежащие на этой высоте (рис. 4.2). Вектор смещения любой внутренней точки мы можем определить по граничной точке, находящейся на том же удалении от прямой.

Рассмотрим внутренние точки, лежащие на какой-либо наклонной прямой (рис. 4.3), и нарисуем векторы их смещения. Тогда концы векторов окажутся на одной прямой. Ряды точек (на прямой) перейдут в ряды точек (на другой прямой). Прямые поворачиваются и растягиваются (или сжимаются). Однако угол поворота различных прямых может быть различен.

Рис. 4.1

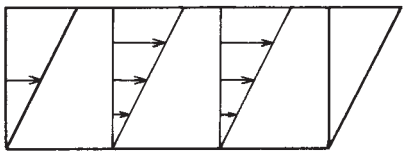


Рис. 4.2

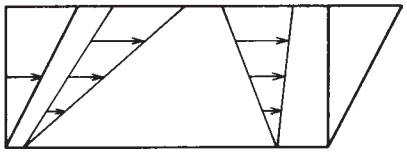


Рис. 4.3

Мы можем изобразить целое поле смещения. Представим себе, что смещение действует не только на прямоугольник, но и на всю плоскость (рис. 4.4). Только точки оси *z* (продолженное основание прямоугольника)

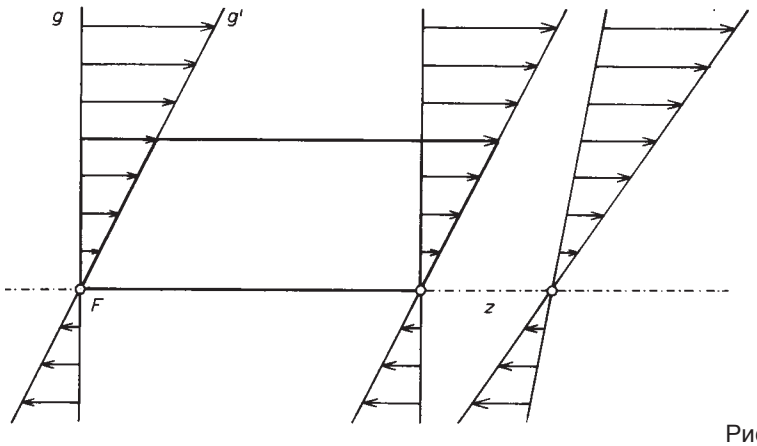


Рис. 4.4

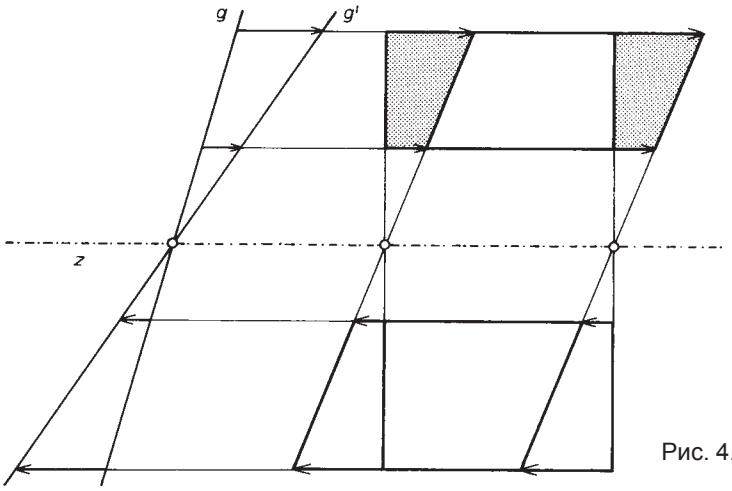


Рис. 4.5

не участвуют в общем движении; их называют *неподвижными точками*. Если точки над осью движутся направо, то точки под осью — налево. Возьмем край прямоугольника, продолжим его вниз и повернем граничную прямую из положения *g* в положение *g′*. Тогда точки над и под осью будут двигаться в противоположном направлении.

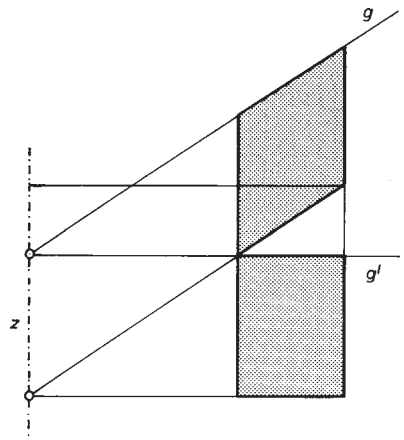


Рис. 4.6

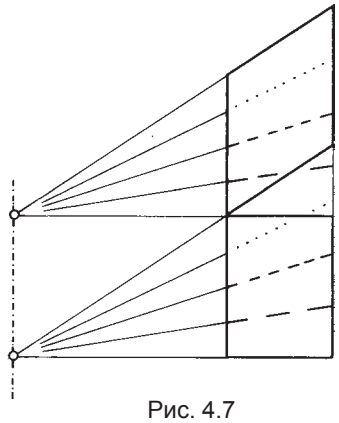


Рис. 4.7

Мы можем мысленно продолжить край прямоугольника и вверх. Прямые g и g' действуют как половинки ножниц с винтом F. Правда, при смещении ножи расширяются или сужаются — иначе точки двигались бы по окружностям вокруг F. Движение плоскости определено осью z и ножницами (g, g'). Нет нужды в вертикальной g. Обе прямые могут быть наклонными, но должны пересекаться в одной точке на оси.

Как выглядит смещение прямоугольника, лежащего над или под осью, но “параллельного” ей (рис. 4.5)? Его основание не остается больше на листе, но движется направо (верхний прямоугольник). Протяженность движения (вектор) можно определить по ножницам. Соответствующий процесс мы наблюдаем и под осью. Сохраняется ли при этом площадь? Да, ибо прямоугольная трапеция, которая прибавляется к одной стороне прямоугольника, конгруэнтна трапеции, отрезаемой с другой стороны.

Должна ли ось обязательно лежать горизонтально? Нет, направление оси может быть любым. Пример: вспомним гномон. В гл.2 мы поэтапно перегоняли прямоугольник R_1 в прямоугольник R_2 (смещениями и параллельными переносами). Последние два шага — параллельный перенос вниз и

третье смещение — мы могли проделать за один шаг — за одно смещение (рис. 4.6) Левый край — ось *z*, *g* и *g′* — ножницы. На рис. 4.7 показаны три промежуточных этапа этого смещения.

Как выглядит смещение треугольника, если он не стоит на оси (рис. 4.8—4.13)? Его вершины перемещаются параллельно оси, а стороны поворачиваются вокруг точек пересечения

Рис. 4.8

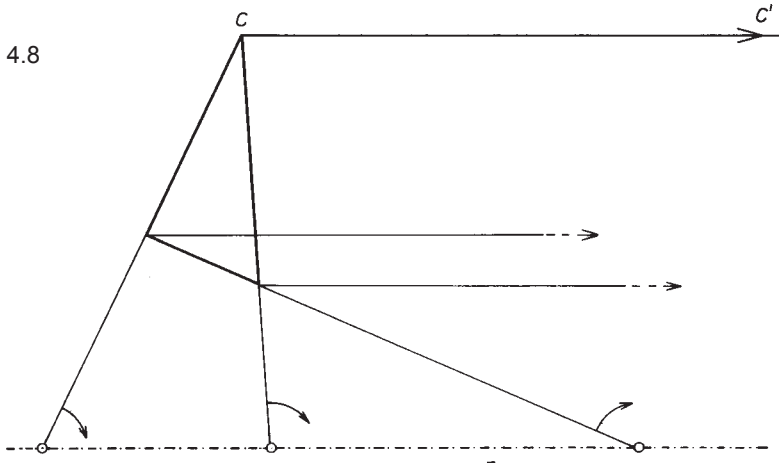
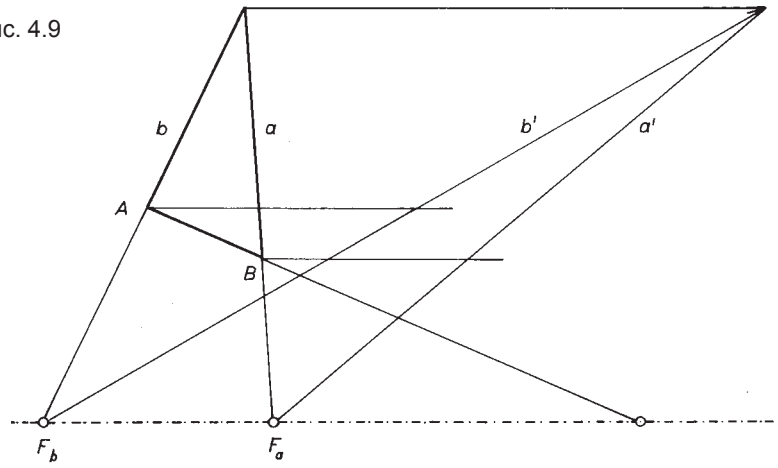


Рис. 4.9



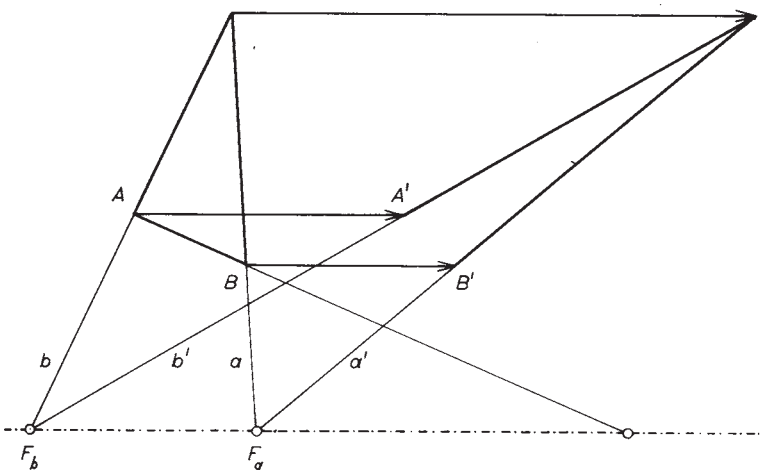


Рис. 4.10

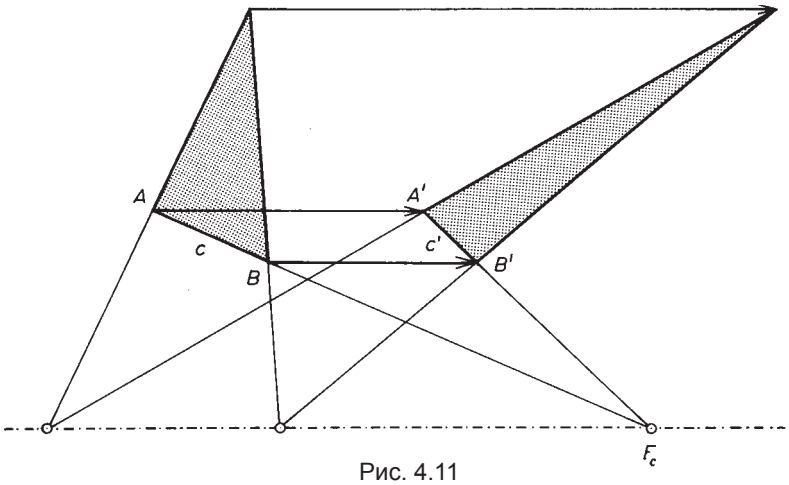


Рис. 4.11

с осью (вокруг неподвижных точек). От точки *C* отложим величину смещения (вектор *CC′* на рис.4.8). Соединим *C* с неподвижными точками F_a и F_b, вокруг них поворачиваются стороны *a* и *b* (и переходят в *a′* и *b′*) (рис.4.9). По ножницам (*a*,*a′*) мы узнаем, куда переходит *B* (рис.4.10), по ножницам (*b*,*b′*) — *A*. Наконец, можно прочертить сторону *c′* (прямая,

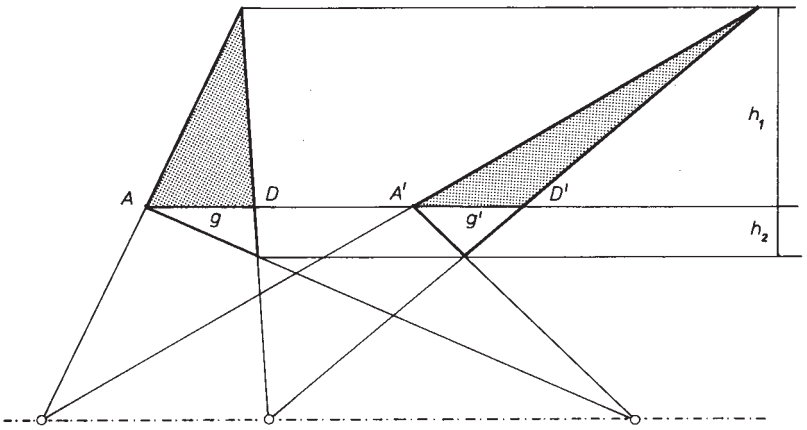


Рис. 4.12

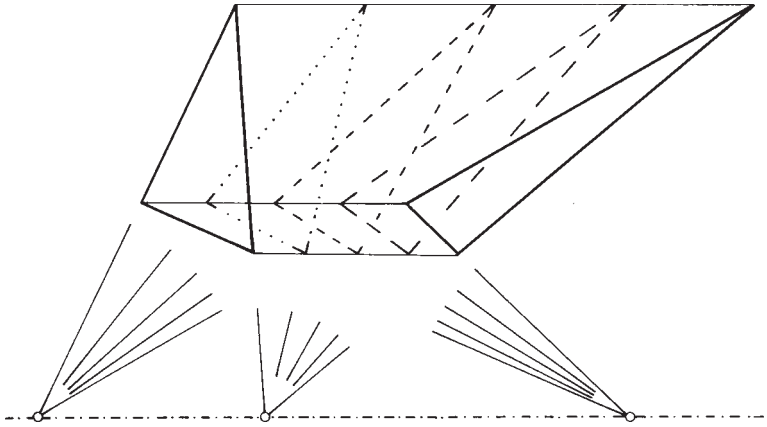


Рис. 4.13

соединяющая три точки: A,B',F_c (рис. 4.11)).

Равновелик ли треугольник ABC смещенному треугольнику $A'B'C'$? Да, ибо горизонталь AA' делит их на два равносоставленных треугольника. Верхняя пара выделена на рис.4.12. У треугольников равные основания g и g' и равная “глубина” h_2.

На рис.4.13 изображены три промежуточные стадии сме-

щения. Представим себе, как треугольник перетекает из исходного состояния через промежуточные положения в окончательное: вершины движутся параллельно оси, стороны поворачиваются вокруг фиксированных точек. Форма треугольника постоянно меняется — но не площадь!

В заключение сместим круг (рис.4.14). Задав отступ, пострим семейство параллельных к оси прямых, а по ножницам (g, g') будем определять величину смещения. Круг смещается вправо, наклоняется, расширяется в определенных направлениях, в других же направлениях — сжимается. Концы векторов лежат на овале. Овал является точным эллипсом. И площадь этого эллипса равна площади круга, ибо послойно они равны!

Пострим в точке P' касательную к эллипсу. Как? Построим в исходной точке P круга касательную к окружности (перпендикулярную радиусу). Продолжим ее до пересечения с осью и соединим точки пересечения с P'. В так называемой геометрии образа каждая деталь связана с соответствующей деталью прообраза. Круг смещается в эллипс. Смещение — процесс отображения, прообраз в данном случае — круг, образ — эллипс.

На рис.4.15 снова построены окружность и эллипс. Рисунок показывает, как одни радиусы сжимаются, а другие — растягиваются. Горизонтальные радиусы остаются прежними. Чтобы можно было сравнить радиусы окружности и их отображения (“эллиптические радиусы”), проведем еще одну окружность с центром в центре эллипса. Три расположенных над горизонтальной прямой радиуса сжимаются, три под — расширяются. Сжатие и расширение вместе приводят к равновеликости.

Результат этого смещения (эллипс) может быть получен композицией параллельного переноса окружности направо и смещения вдоль горизонтального диаметра.

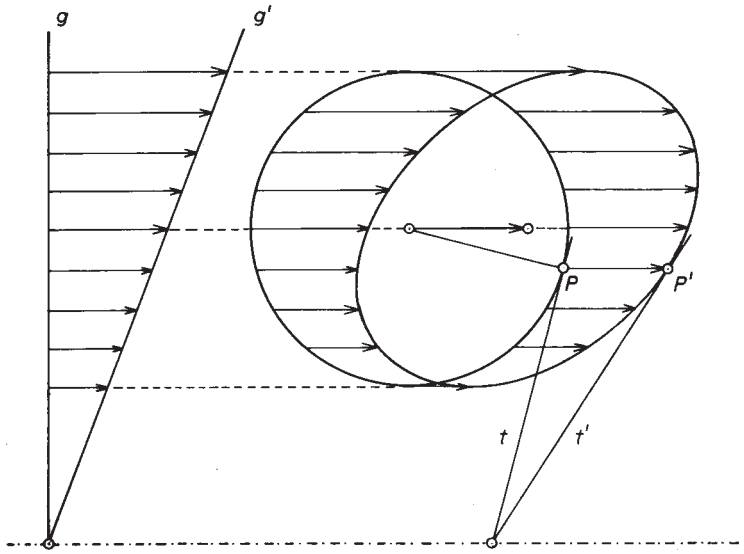


Рис. 4.14

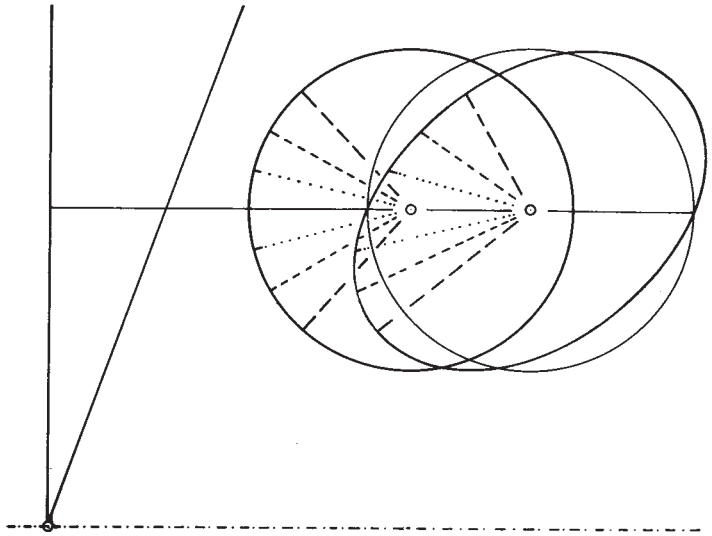


Рис. 4.15

Задачи к теме “Смещение как процесс на всей плоскости”

Четыре нижеследующие задачи могут быть решены либо прямо в книге, либо предварительно переведены на кальку. Конфигурацию можно перенести на лист и с помощью булавки.

Эти задачи настраивают на работу с преобразованиями формы. Они являются осмысленным продолжением предмета “Рисование форм”. Только подумайте: всякий образ равен по площади своему противообразу!

1. Смести треугольник (рис.4.16) из положения C_0 в положение C_1, C_2, C_3... Придерживайся двух законов движения: вершины перемещаются параллельно оси, стороны поворачиваются вокруг точек пересечения с осью. (Сперва построение простым карандашом, затем каждое смещение своим цветом.)

2. Смести квадрат (рис.4.17) из положения D_0 в положе-

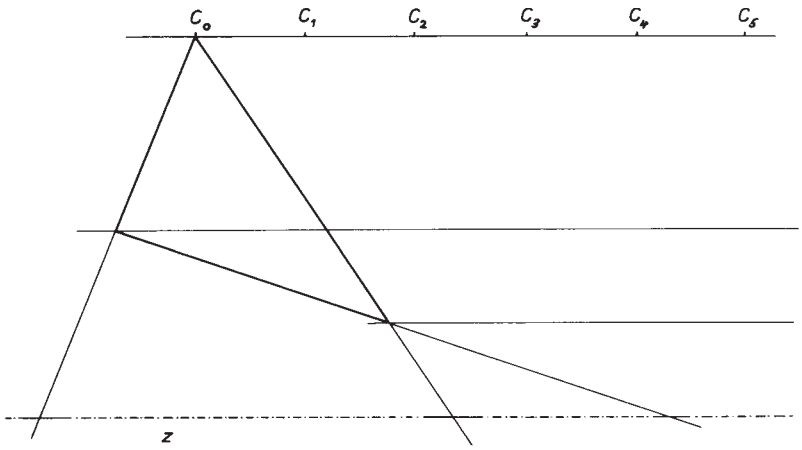


Рис. 4.16

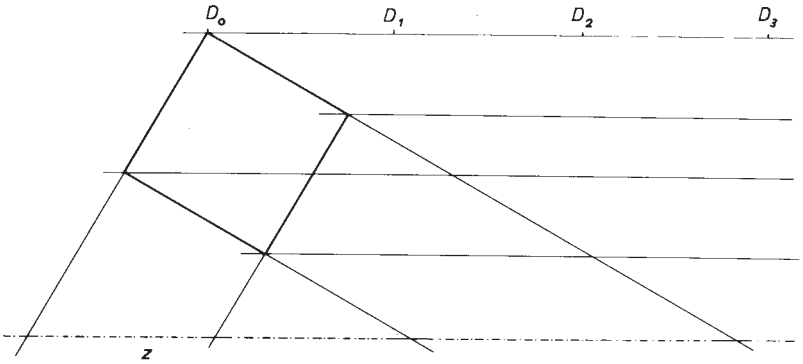


Рис. 4.17

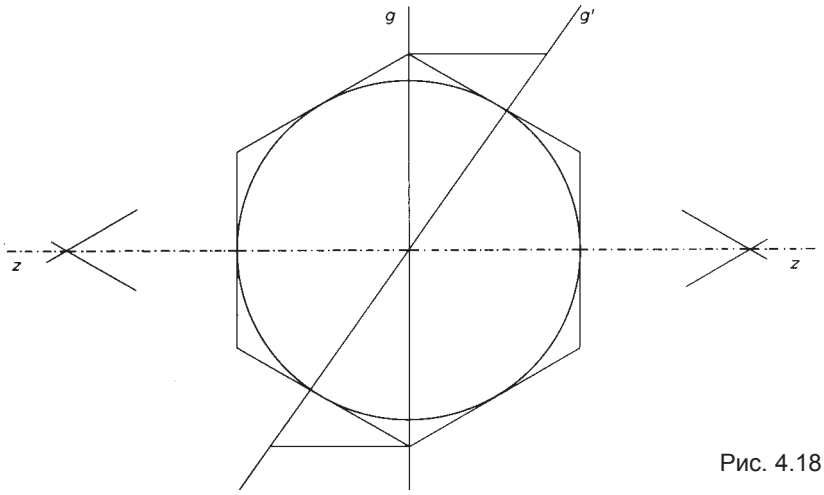


Рис. 4.18

ния D_1, D_2, D_3... Получаются различные параллелограммы, все длиннее и уже.

Задачи 3 и 4 уведут нас довольно далеко и могут быть решены только в старших классах.

3. Осью Z и ножницами (g, g') задано смещение (рис. 4.18).

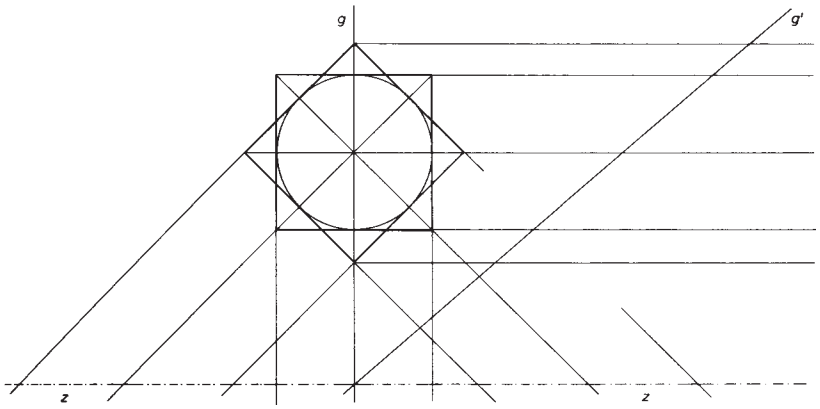


Рис. 4.19

Смести шестиугольник. Часть над осью склоняется вправо, под осью — влево. Из круга возникает эллипс. Он вписан в образ шестиугольника. Точки касания в прообразе переходят в точки касания в образе.

4. Вокруг окружности (рис. 4.19) описаны два квадрата, вместе образующие восьмиконечную звезду. В образе эллипс вписан в получившийся образ звезды. Для ясности хорошо нарисовать квадраты различными цветами.

5. Гомотетия как противоположность смещению

Мы охарактеризовали смещение как отображение, меняющее форму, — но не площадь фигуры. Впрочем, прямые при смещении всегда остаются прямыми.

Существует другое отображение — меняющее площадь, но сохраняющее форму. Это так называемая *гомотетия*. Если ставится цель увеличить заданную фигуру, сохраняя ее форму, то это можно сделать, прибегнув к помощи *центра*. Пусть, например, нужно увеличить четырехугольник на рис. 5.1. Выберем — где-нибудь внутри — центр гомотетии Z и соединим его с вершинами четырехугольника (лучи гомотетии). Затем перенесем одну из сторон, например a, параллельно самой себе вовне, до a'. Вершины A и B переместятся по лучам гомотетии до A' и B'. На рис.5.1 a вынесено вовне настолько, что расстояния ZA и ZB удваиваются; соответственно a' оказывается в два раза больше, чем a.

Затем параллельно вовне мы выносим сторону b, пока она не пройдет через уже полученную точку B' (рис. 5.2). На следующем луче гомотетии мы получим вершину C' (она в два раза дальше от Z чем C). И так далее (рис.5.3): с параллельно переносится до C', и получается новая вершина D'. И если мы работали точно, увеличенная фигура замкнется: то есть d' (параллельная d) пройдет через A' и D'. Непосредственное впечатление от увеличенного четырехугольника — его форма совпадает с формой маленького. Углы одинаковы, одинаковы и отношения сторон; $a':b'=a:b$; $b':c'=b:c$ и т.д. То есть все расстояния в образе в 2 раза больше расстояний в прообразе. Фигуры, родственные в этом смысле друг другу, называются подобными. Описанное нами отображение называется гомотетией. Коэффициент увеличения (или умень-

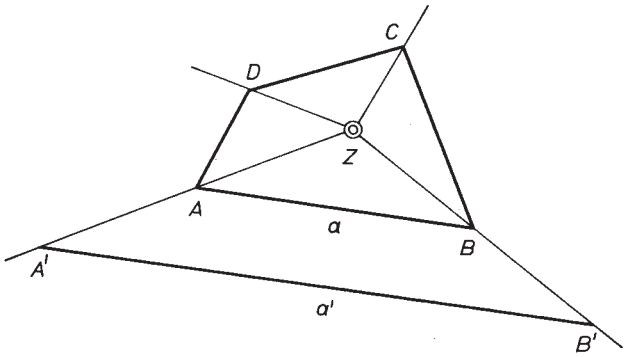


Рис. 5.1

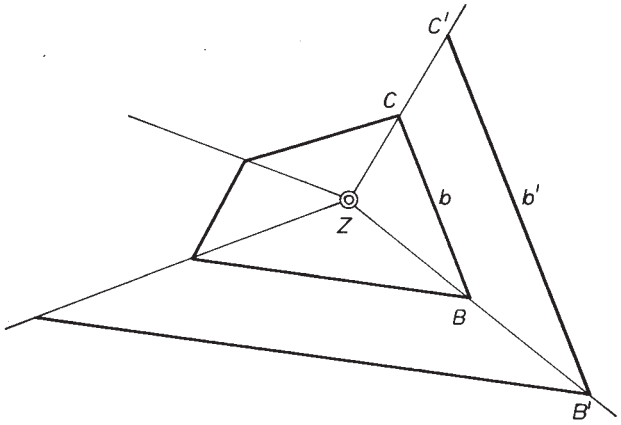


Рис. 5.2

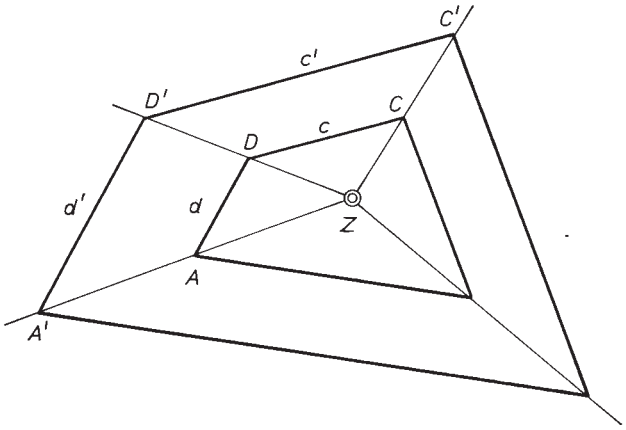


Рис. 5.3

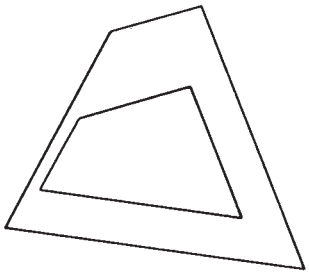


Рис. 5.4

Рис. 5.5

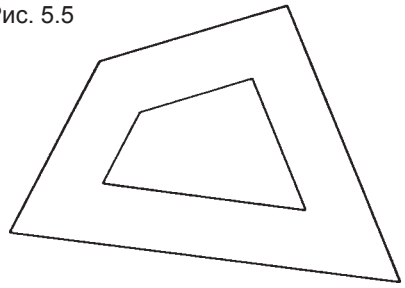
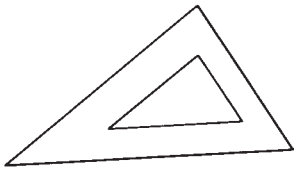


Рис. 5.6



шения) называют коэффициентом подобия. Он, разумеется, не обязан быть всегда равным 1:2. Отношения площадей при этом равны 1:4.

Необходим ли центр? Можно проделать опыт и *как-либо* перенести вовне (но только параллельно) четыре стороны, не обращая внимания на определенный центр (рис.5.4) Мы тотчас убеждаемся, что увеличенный четырехугольник не обладает первоначальной формой. У него, правда, сохранились углы, но отношения сторон сильно поменялись, например левой к верхней. Можно сделать вторую попытку и выдвинуть стороны вовне на *одинаковое* расстояние, например на ширину линейки (рис.5.5). Сохранилась ли теперь форма? Проверим отношения сторон: скажем, снова левой к верхней. Оно изменилось — то есть в целом изменилась и форма.

Рис. 5.7

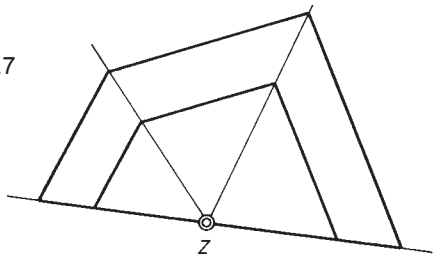


Рис. 5.8

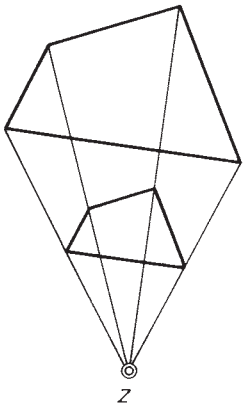
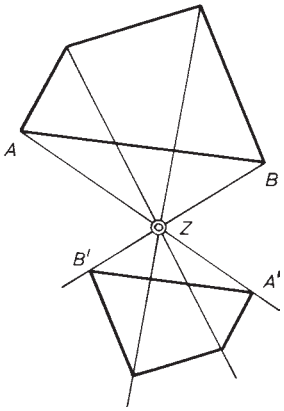


Рис. 5.9



Параллельный перенос сторон только тогда дает сохраняющее форму преобразование, когда движение вершин происходит по лучам из одного центра. Тогда все точки и прямые удаляются в равном отношении от центра (в отношении подобия).

Важное исключение представляют собой треугольники. В этом случае мы можем как угодно параллельно переносить стороны. Соединительные прямые между соответствующими вершинами сами собой пройдут через общий центр! (Проведи соединительные прямые на рис. 5.6.) Причина этого удивительного факта заключается в фундаментальных законах пространства; их можно обсуждать в старших клас-

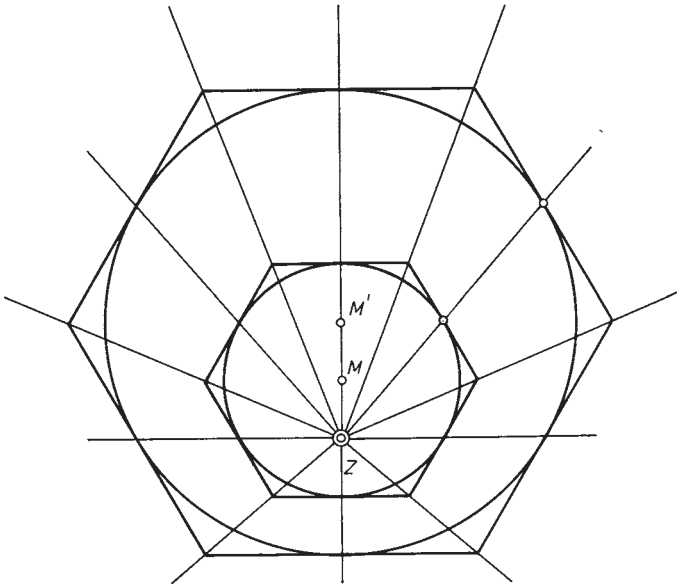


Рис. 5.10

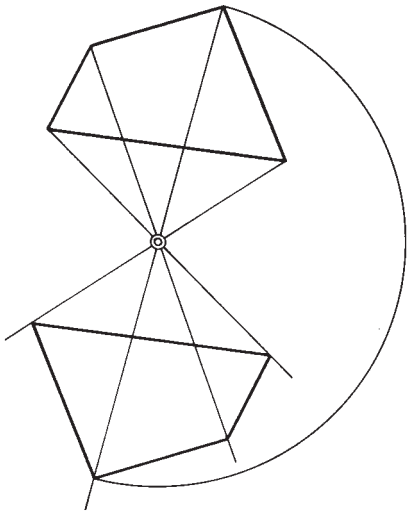
сах (см. главу 17 из книги автора “Проективная геометрия”).

Центр не обязан лежать внутри фигуры, он может быть и на краю (рис.5.7 коэффициент подобия $^2/_3$, коэффициент увеличения площади $^4/_9$), и даже вовне (рис.5.8, уменьшение всех длин наполовину, площадей — в четверть). Вершины и стороны могут даже переместиться на другую сторону центра (рис.5.9, коэффициент подобия $^3/_2$, коэффициент увеличения площади $^9/_4$).

Как отображается при гомотетии окружность? Когда центр гомотетии совпадает с центром окружности, тогда уж точно получится окружность. А если нет? На рис. 5.10 окружность и описанный шестиугольник отображены по тем же законам, что и на рис. 5.1–5.3. Правильный шестиугольник остается правильным! Круг остается кругом! Гомотетия сохраняет форму!

Есть особый случай, когда гомотетия сохраняет также

Рис. 5.11



и площадь (рис.5.11). Если вершины движутся к центру, проходят сквозь него и оказываются с другой стороны, но на прежнем расстоянии. Возникает *центрально-симметричная* фигура. У нее не только форма, но и размеры совпадают с размерами исходной фигуры. Образ и прообраз конгруэнтны. Поворот на 180° снова совмещает обе фигуры.

Примеры на гомотетию

Впиши квадрат в окружность, полуокружность и сектор (например, с центральным углом 60°). “Вписать” означает: все четыре вершины квадрата должны лежать на границе круга, полукруга или сектора.

Для окружности задача решается легко: достаточно построить произвольным образом два взаимно перпендикулярных диаметра: их концы будут вершинами квадрата. Существует бесконечно много вписанных в окружность

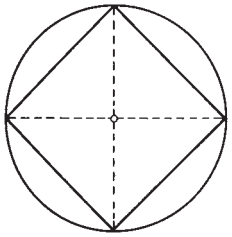


Рис. 5.12

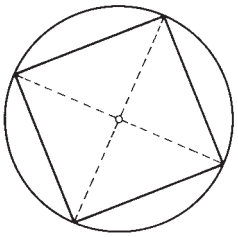


Рис. 5.13

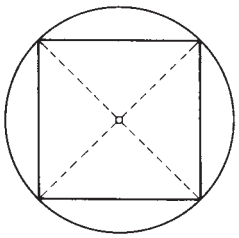


Рис. 5.14

квадратов. На рис. 5.12—5.14 рассмотрены три примера.

Для полукруга задача сложнее: представим себе квадраты, вершины которых лежат на его границе — границей является и диаметр. Воображение быстро подскажет нам: такой квадрат существует, и он единственный. Он лежит посередине диаметра (рис.5.15). Но как его построить? Расположим на середине диаметра сперва квадрат поменьше и затем увеличим его гомотетией с центром в середине диаметра (рис.5.16). Или будем отталкиваться от большего квадрата и уменьшим его. В последнем случае сам собой напрашивается квадрат, построенный на диаметре (рис.5.17). Затем будем стягивать его вершины к центру, пока две “верхние” вершины не окажутся на окружности. Конструктивно это решение предпочтительнее, поскольку уменьшаются и возможные неточности при построении большого квадрата.

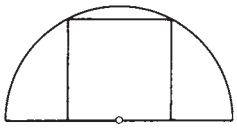


Рис. 5.15

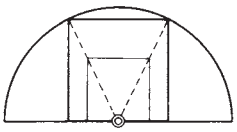


Рис. 5.16

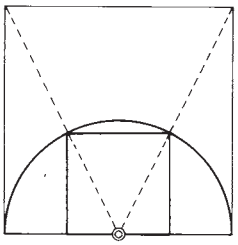


Рис. 5.17

А третья задача? Как вписать в сектор (центральный угол 60°) квадрат? Две вершины на дуге, по одной — на радиусах (рис. 5.18). При построении можно отталкиваться от большего или меньшего квадрата (рис. 5.19). В первом случае напрашивается квадрат, построенный на хорде.

Но в сектор можно вписать более чем один квадрат: на одном радиусе могут лежать две вершины. Возможные вспомогательные квадраты указаны на рис. 5.20. Поскольку сторона квадрата может лежать и на другом радиусе, решений *три*. Прекрасная задача для старшеклассников: определить сторону квадрата по радиусу и углу.

Задачи

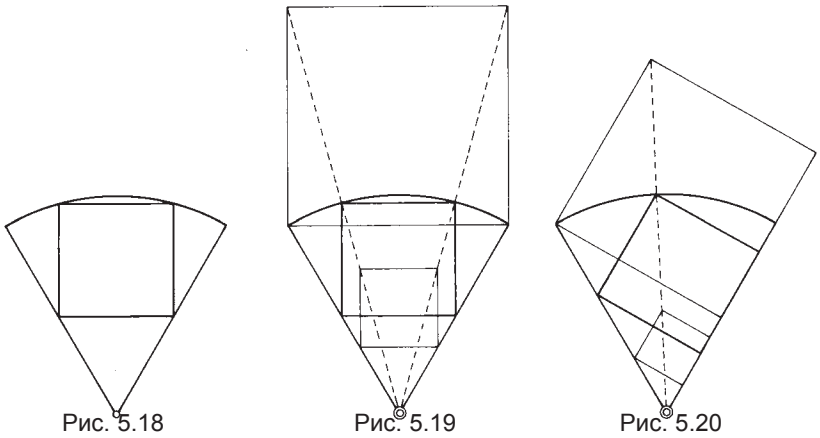


Рис. 5.18 Рис. 5.19 Рис. 5.20

1. Нарисуй треугольник со сторонами c=7 см, a=6 см, b=5 см. Впиши в треугольник квадрат, стоящий на стороне c (a, b).

2. Впиши в круг (полукруг, сектор) прямоугольник, стороны которого относятся друг к другу как 2 : 1. Решение в принципе подобно случаю с вписанным квадратом. От большего или меньшего прямоугольника следует отталкиваться и в случае окружности.

3. (Рис. 5.21): Увеличь из центра Z окружность и описанный вокруг нее шестиугольник, например удваивая расстояние от любой точки до Z.

4. (Рис. 5.22): Увеличь из центра Z окружность, прямо удваивая расстояния от вершин до центра Z. Особую роль играют касательные из Z окружности. Точки касания отыскиваются при пересечении данной окружности с окружностью Фалеса, построенной на ZM как на диаметре. (На рис. 5.22 от всей окружности Фалеса видимы только центр и две дуги.)

5. Построй две окружности, касающиеся сторон данного угла и проходящие через данную точку P (рис. 5.23). *Указание*: Построй вначале произвольную окружность, касающуюся сторон угла и не проходящую через P. Затем уменьши или увеличь ее гомотетией из вершины угла так, чтобы левый или правый край прошел через P. (Греческий геометр Аполлоний поставил задачу в общем виде: построить окружность, проходящую через заданную точку и касающуюся данных прямых или данных окружностей. Наша задача — частный случай задачи Аполлония.)

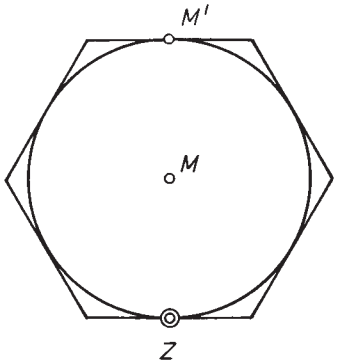


Рис. 5.21

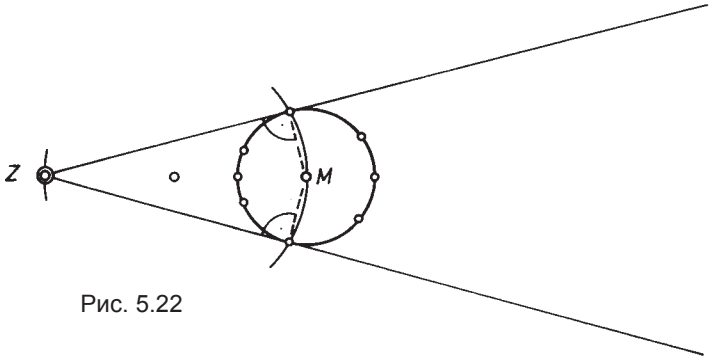


Рис. 5.22

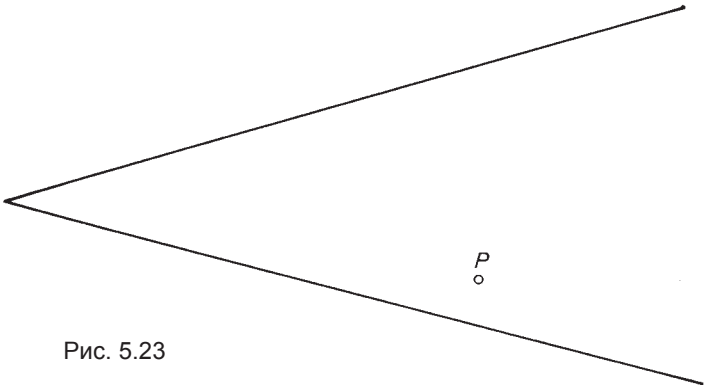


Рис. 5.23

6. Экскурс в старшие классы: центрально-осевые коллинеации

В старшей школе ученики узнают, что смещение и гомотетия — два частных случая более общего отображения, так называемой *центрально-осевой коллинеации*. Коллинеацией называется всякое преобразование, переводящее прямые в прямые. Центрально-осевая коллинеация имеет как *ось*, так и *центр*. При отображении точки движутся по лучам, проходящим через центр (как в случае гомотетии), а прямые поворачиваются вокруг точек пересечения с осью (как в случае смещения).

Требуется, скажем, отобразить описанным образом треугольник (рис. 6.1). Соединим его вершины с центром (лучами коллинеации), а продолжения сторон пересечем с осью (неподвижные точки). Переместим *C* вдоль луча коллинеации до *C′* (внутрь или вовне — неважно). При этом движутся обе стороны *a* и *b*, поворачиваясь вокруг своих неподвижных точек до положений *a′* и *b′* (рис. 6.2). При этом вращении *A* и *B* переходят соответственно в *A′* и *B′*, скользя по своим лучам

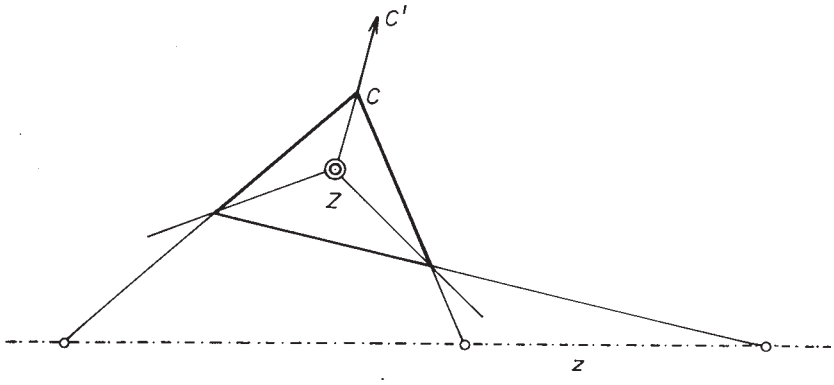


Рис. 6.1

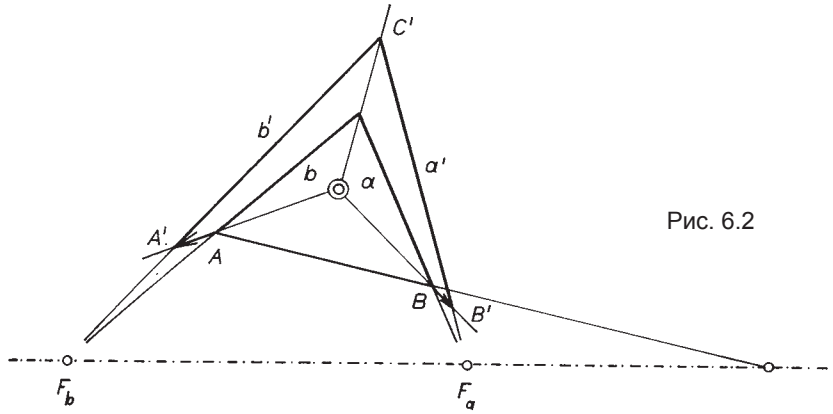


Рис. 6.2

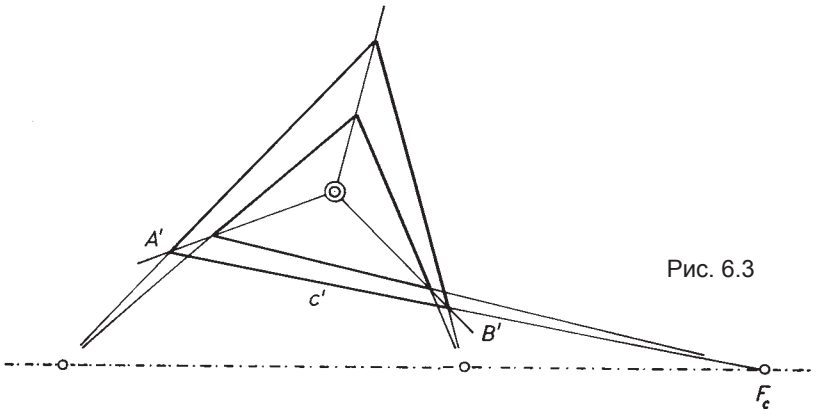


Рис. 6.3

коллинеации. Наконец, прочертим третью сторону (рис. 6.3): *c′* соединяет *A′*, *B′* и F_c. Все перемещения происходят по сути одновременно. Но построение можно выполнить толко поэтапно, при этом следует чередовать построения образов точек и прямых.

Подобным образом на рис. 6.4—6.6 построено отображение правильного шестиугольника. *D* переходит в *D′*; *c* и *d* подхватываются точкой *D* и, поворачиваясь вокруг *FC* и *FD*, переходят в положение *c′* и *d′*. При этом *E* и *C* сдвигаются до *E′* и *C′*. Затем *b* и *c* и так далее. В итоге возникает шестиугольник с новой формой и площадью! Разве не здорово? Он не

уступает своему правильному собрату, поскольку обладает внутренней динамикой! Следующим шагом можно *D* перевести в *D′* и повторить все сначала. Так появится целое семейство шестиугольников, закономерно смеяющих друг друга. Геометрическая метаморфоза!

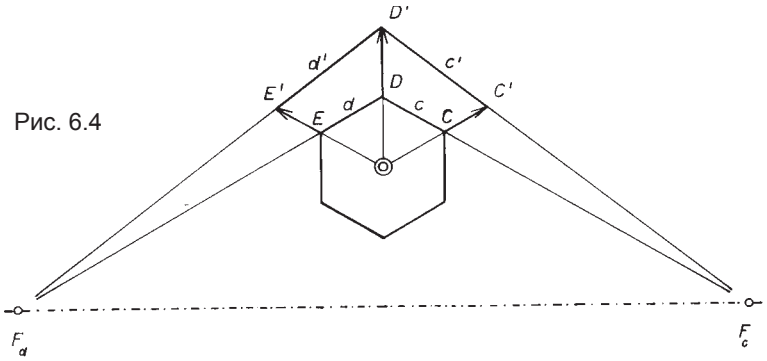


Рис. 6.4

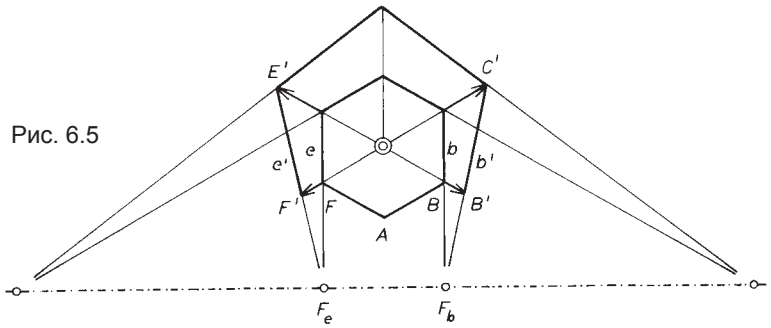


Рис. 6.5

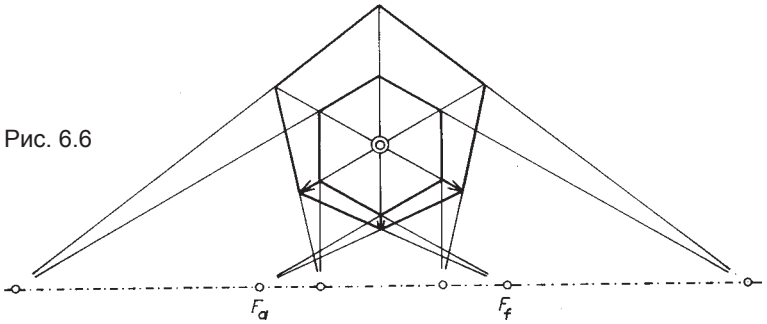


Рис. 6.6

7. Введение в теорему Пифагора

Мы переходим теперь к теореме Пифагора. Значение этой темы невозможно переоценить. Чисто предметно эта теорема играет в математике огромную роль. Но гораздо важнее ее значение для духовной истории человечества.

В чем состояла миссия Пифагора? Он должен был перейти от мистического, образного сознания к мыслительному постижению мира, к тому, что мы называем “мыслительным мировосприятием” (см. главу “Мировоззрение греческих мыслителей” в книге Р.Штейнера “Загадки философии”). Естественно, вначале это происходило в узком кругу людей, собранных им в Кротоне в Южной Италии[1]. Но из этого небольшого кружка пифагорейцев исходило огромное влияние, и географически, и исторически на столетия, на тысячелетия, вплоть до наших дней. Мы не знали, как именно рассматривал Пифагор прямоугольный треугольник и квадраты его сторон. Но определенно можно сказать, что этими рассмотрениями он стремился пробуждать, просветлять, укреплять и углублять мыслительную жизнь своих учеников. Духовное средство воспитания! Такую же роль играли эти рассмотрения на протяжении более чем двух тысячелетий и продолжают играть сегодня, но теперь уже не для узкого круга людей, а для всех школьников. Ни одна фигура не была предметом столь глубокомысленных размышлений. Мыслительная фантазия все время вдохновлялась ею; были придуманы бесчисленные доказательства. Некоторые из них мы теперь рассмотрим[1].

[1] См. отличную основательную работу Эрнста Бинжеля “Пифагор”.

Что же отличает эту теорему? Рассмотрим различные треугольники — и остроугольные, и тупоугольные (рис.7.1). Чем выделяются из этого многообразия треугольники прямоугольные? Тем, что они составляются из особых пространственных направлений — горизонтали и вертикали (рис. 7.2)! Наглядно горизонталь и вертикаль мы переживаем на примере водной поверхности и падающего на нее камня. Или Земли и стоящего на ней человека. Когда-то в детстве мы обрели вертикаль. В высшей степени интересно наблюдать за тем, как ребенок снова и снова завоевывает вертикаль, что является с его стороны не только физическим, но и моральным поступком. В речи мы выражаем моральную сторону этого факта так: “прямой человек, стойкий человек, прямой характер”.

Рис. 7.1 переживается нами иначе, чем рис. 7.2: возникает ощущение, что треугольники на рис.7.2 *стоят* на горизонтали как маленькие кафедры на столе.

Сторонам, образующим прямой угол, греки дали особые названия — *катеты*. Наклонную прямую они называли *гипотенузой*. Она всегда лежит против прямого угла.

Но, даже когда прямоугольные треугольники изображены иначе (рис.7.3), мы чувствуем, что две стороны в них находятся в особом отношении друг к другу. Мы все еще говорим о “стоянии”, “вертикальности по отношению друг к другу”.

Эта “вертикальность по отношению друг к другу” приобретает особый характер, когда третья сторона — гипотенуза — лежит, лежит горизонтально, и мы рассматриваем различные прямоугольные треугольники, построенные на одной гипотенузе (рис. 7.4, середина). Прямоугольные треугольники заполняют полукруг (круг Фалеса), диаметр которого — гипотенуза, что означает “перетягивающая”

[1] Американский математик Элиша Скотт Лумис (Elisha Scott Loomis) собрал в книге “Теорема Пифагора” (“The Pythagorean Proposition”) 215 доказательств, многие из которых вычислительные.

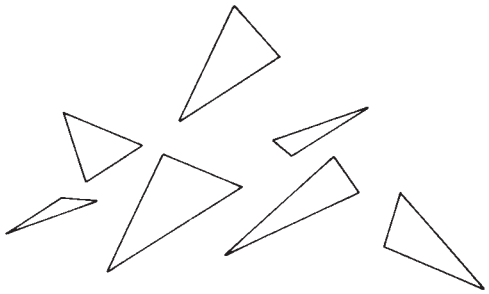


Рис. 7.1

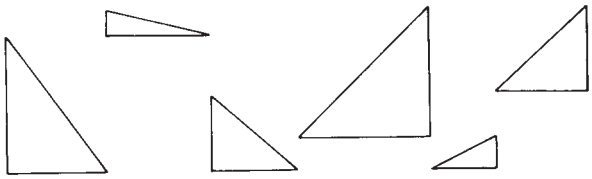


Рис. 7.2

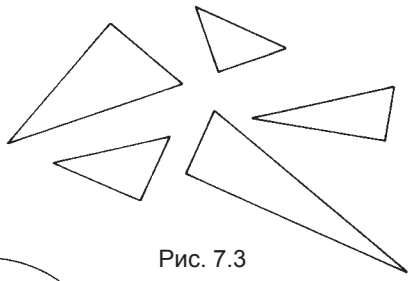


Рис. 7.3

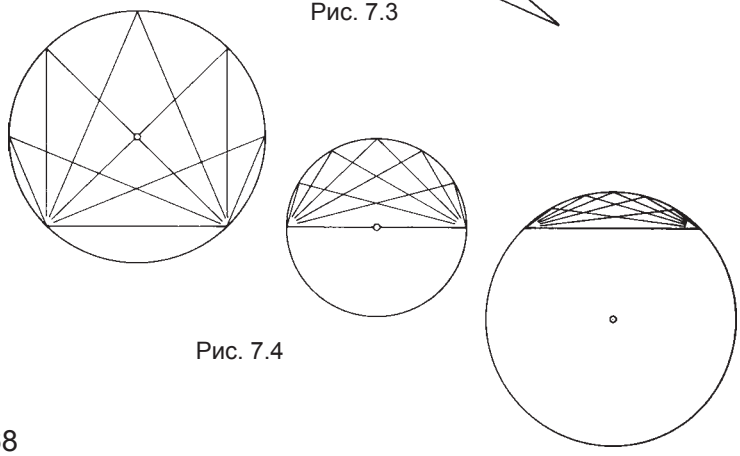


Рис. 7.4

прямой угол.

Правда, остроугольные и тупоугольные треугольники с общим основанием и одинаковым углом при вершине также заполняют часть окружности. Тупоугольные треугольники словно сдавлены ее плоским сводом (рис. 7.4, справа). Остроугольные треугольники, в свою очередь, распирают свою часть круга (рис. 7.4, слева). Прямоугольные треугольники не взлетают и не стелются — они гармонично удерживаются.

Но, может быть, прямоугольные треугольники выделяются не только своим прямым углом, но и *длинами сторон*? Простыми длинами — нет! Конечно, гипотенуза длиннее катетов; но ведь в любом треугольнике против большей стороны лежит больший угол.

Особенность сторон прямоугольного треугольника выступает только при рассмотрении *площадей*; особенно площадей квадратов, хотя могут браться и другие фигуры (см. гл.16: “Заключительные замечания к теореме Пифагора”). Однако ключевая фигура — квадрат.

Пририсуем квадраты к сторонам не только прямоугольного, но и остро- и тупоугольного треугольников (рис.7.5). Средняя фигура выделяется: она архитектурно законченнее двух других. Стороны верхних квадратов пересекаются в вершине треугольника, образуя четыре прямых угла. Сторона одного квадрата мягко переходит в сторону другого. В случае тупоугольного треугольника, верхние квадраты “кивают” вниз, нижние — смотрят вверх. На всех трех рисунках нижний квадрат один и тот же. В тупоугольном треугольнике верхние квадраты меньше нижнего, в остроугольном — больше. В случае прямоугольного треугольника даже на первый взгляд достигнуто равновесие.

Ощущение равновесия переходит в уверенность, если изобразить случай самого специального из всех прямоугольных треугольников — *симметричного* в самом себе, равнобедренного прямоугольного треугольника (рис. 7.6). Видно, как

квадрат гипотенузы распадается на *четыре* треугольника,— конгруэнтных исходному,— и каждый из квадратов катетов может быть составлен из *двух* таких треугольников. Итак, полное равновесие площадей: *два квадрата катетов вместе равны квадрату гипотенузы.*

В соседних фигурах (остро- и тупоугольном равнобедренном треугольниках) неравенство бросается в глаза. Особенно — “заваливание” квадратов внутрь или наружу.

Как обстоит дело с равновесием между верхним и нижним квадратами в случае, если треугольник *не равнобедренный*? Этот вопрос мы обсудим в следующих главах.

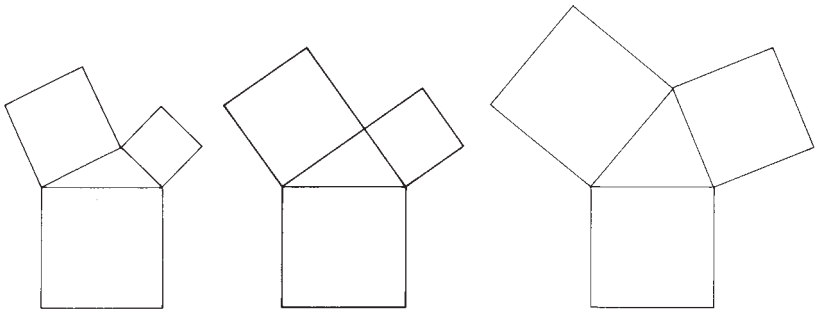


Рис. 7.5

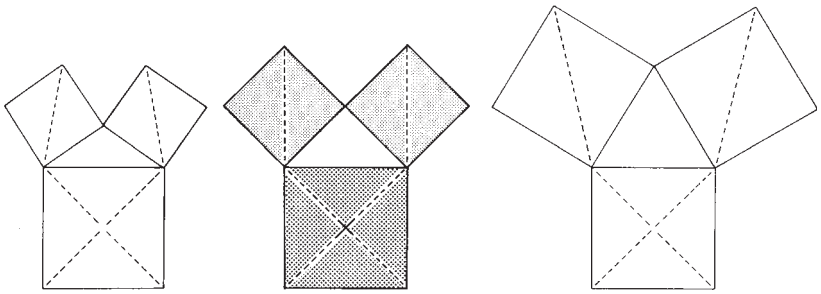


Рис. 7.6

8. Теорема Пифагора

Сперва изобразим прямоугольный треугольник так, чтобы особенно отчетливо выделялся прямой угол: один катет при этом будет горизонтален, другой — вертикален.

Просто нарисовав три квадрата (рис. 8.1), естественно, ничего нельзя заключить об искомом равенстве. Фигура должна быть дополнена, увидена в более широком контексте, чтобы ее тайное стала явным. Мы начнем немедленно, только попробуем почувствовать, где же первое приглашение к дополнению?

Пририсуем к треугольнику только квадраты катетов (рис. 8.2). Слева внизу между квадратами дырка — ее нужно дополнить прямоугольником. Справа вверху напрашивается еще один исходный прямоугольный треугольник. Квадраты катетов, таким образом, включены в один большой четырехугольник, и не просто в четырехугольник, а в квадрат, стороны которого равны $a+b$.

Квадрат гипотенузы одной стороной примыкает к треугольнику (рис.8.3). Нельзя ли “пристроить” треугольники и к другим его сторонам? Достаточно только продлить катеты, провести через правую вершину вертикаль, а через левую — горизонталь, и треугольники готовы, причем, опять-таки, возникает объединяющий прямоугольник. Похож на квадрат? Действительно?

Рассмотрим четыре треугольника (рис.8.4). Безусловно, они все прямоугольные, поскольку стороны объемлющего прямоугольника вертикальны и горизонтальны. Кроме того, у всех треугольников равны гипотенузы (сторона квадрата). А другие углы? В прямоугольном треугольнике острые углы α и β вместе составляют $\alpha+\beta=90^\circ$ (сумма всех углов = 180°, а поскольку $\gamma=90^\circ$, значит, $\alpha+\beta+90^\circ=180^\circ$, значит

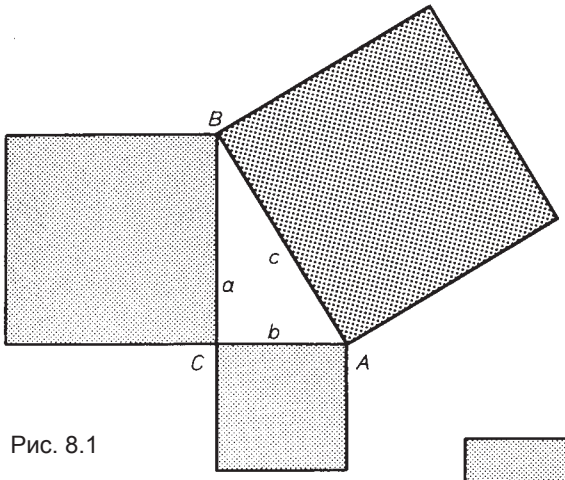


Рис. 8.1

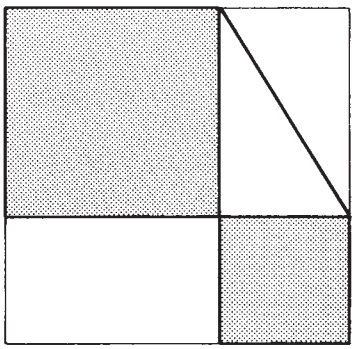


Рис. 8.2

Рис. 8.3

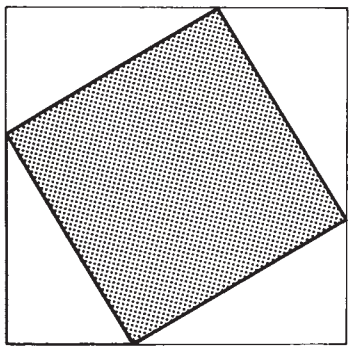
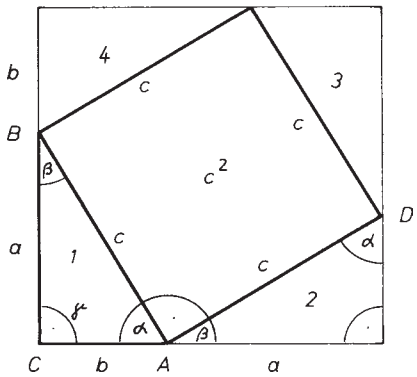


Рис. 8.4



$\alpha+\beta=90°$). Но тогда угол треугольника 2 при вершине *A* должен быть равен β, ведь вместе с α и прямым углом квадрата он составляет 180° (развернутый угол при вершине *A*). Тогда угол при вершине *D* должен быть снова равен α (сумма углов треугольника 2). Аналогичные рассуждения могут быть проведены для углов треугольников 3 и 4, и выяснится, что они также равны α и β. Итак, четыре треугольника имеют равные гипотенузы и прилежащие углы. Такие треугольники конгруэнтны, то есть у них равны и остальные стороны. В нашем случае это катеты *a* и *b*. Поскольку каждая сторона квадрата состоит из копии катета *a* и катета *b*, следовательно, все стороны равны *a*+*b* и прямоугольник — квадрат.

Теперь рассмотрим фигуру в целом (рис.8.5). Квадрат гипотенузы + 4 треугольника образуют верхний квадрат. Квадраты катетов + 2 прямоугольника дают нижний квадрат. Стороны обоих объемлющих квадратов = *a*+*b* — значит, квадраты катетов вместе должны быть равны квадрату гипотенузы! Тайна фигуры раскрыта!

Такие рассуждения — это словно беседа между созерцающим и мыслящим духом, с одной стороны, и геометрической фигурой — с другой. Важная цель преподавания геометрии состоит в том, чтобы ученики смогли постепенно вживаться в такие беседы. Они развивают мыслящее созерцание и созерцательное мышление. Понятно, что этого нельзя достичь во всей полноте на первом же уроке. Гораздо лучше, чтобы такая беседа могла развиваться постепенно. Рисунок может несколько дней оставаться на доске или появиться на ней через недели снова. Учитель постоянно возвращает к нему учеников, с каждым разом проясняя взаимосвязи. Сперва они чуть брезжат; чем дальше, тем четче становятся слова, причем вместе с поиском нужных слов оформляются понятия. Со временем развивается причинно-следственное мышление “если — тогда”, как это представлено при рассмотрении углов треугольника. Такие мыслительные силы

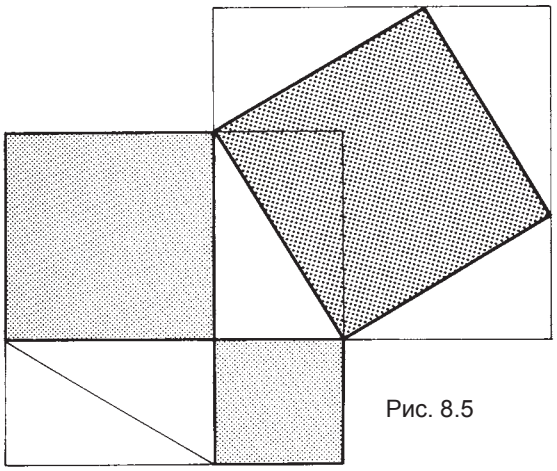


Рис. 8.5

Рис. 8.6

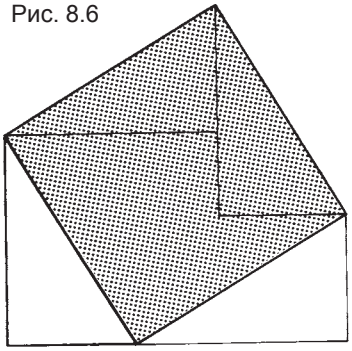
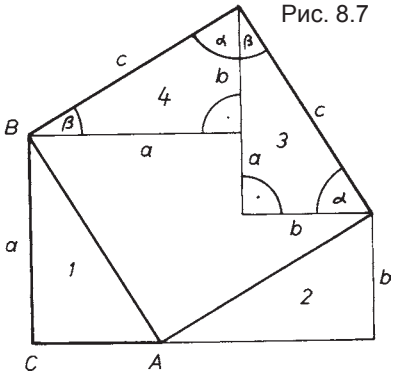


Рис. 8.7



укрепляют развивающиеся силы суждения. Они — тот духовный свет, который освещает геометрическую взаимосвязь.

Разумеется, пока рассматривается только одна фигура, эта взаимосвязь не может еще полноценно ожить в сознании. Следуют дальнейшие рассмотрения такого же рода; с каждым — переживание углубляется.

Следующая ступень первого рассмотрения: нарисуем треугольники 3 и 4 внутри квадрата гипотенузы, проведя вертикальную прямую через верхнюю и горизонтальную — через правую и левую вершины (рис.8.6). Конечно же, получившиеся треугольники опять прямоугольные с гипотенузой *c* (рис. 8.7). И конечно же, у них те же острые углы α и β, что и у треугольников 1 и 2. Ведь треугольник 3 — это просто параллельно перенесенный треугольник 1 (а треугольник 4 — параллельно перенесенный треугольник 2). Снова работает признак конгруэнтности: треугольники конгруэнтны по стороне (в данном случае это гипотенуза) и прилегающим углам. Это означает, что равны и соответствующие пары других сторон, то есть все четыре треугольника имеют катеты *a* и *b*. Но тогда и два квадрата катетов легко вписываются в фигуру! Они уже почти видны! Нужно только заштриховать (рис. 8.8). Справа b^2, слева a^2; оба квадрата катетов стоят на общем основании и соприкасаются одной стороной.

Заштрихуем квадрат гипотенузы и квадраты катетов. Область пересечения фигур выделяется наложением штриховок (рис. 8.9). Возникает неправильный пятиугольник с вогнутостью. Если прибавить к нему треугольники 1 и 2,

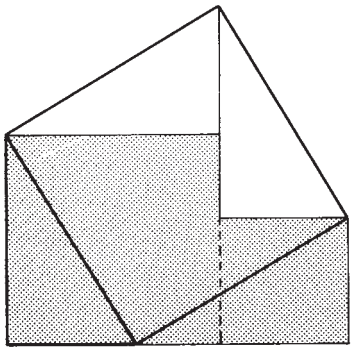


Рис. 8.8

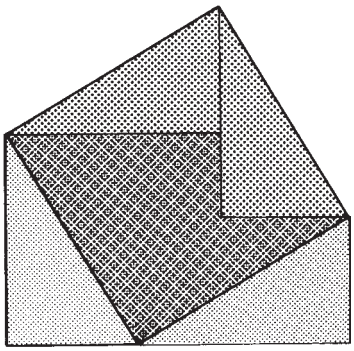
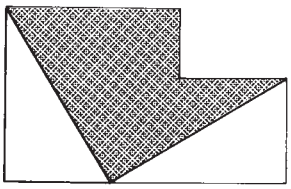


Рис. 8.9

Рис. 8.10



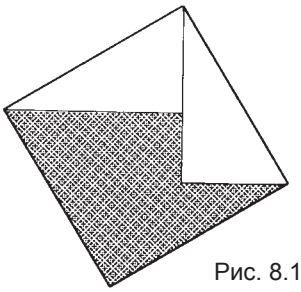


Рис. 8.11

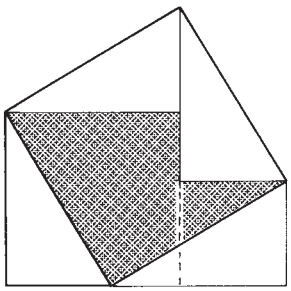


Рис. 8.12

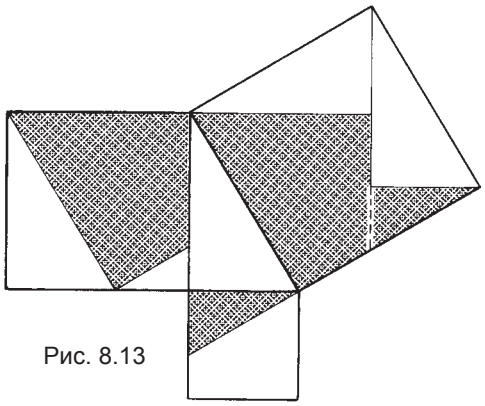


Рис. 8.13

получатся квадраты катетов (рис. 8.10). Если прибавить к нему треугольники 3 и 4, получится квадрат гипотенузы (рис. 8.11). В обоих случаях суммарная площадь равна пятиугольнику — 2 треугольника; следовательно, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Можно нарисовать фигуру на картоне, вырезать пятиугольник и оба треугольника и сложить их по рис.8.10 или 8.11. В вершины треугольников, примыкающие к правой и левой вершине пятиугольника, можно воткнуть булавки и начать по-

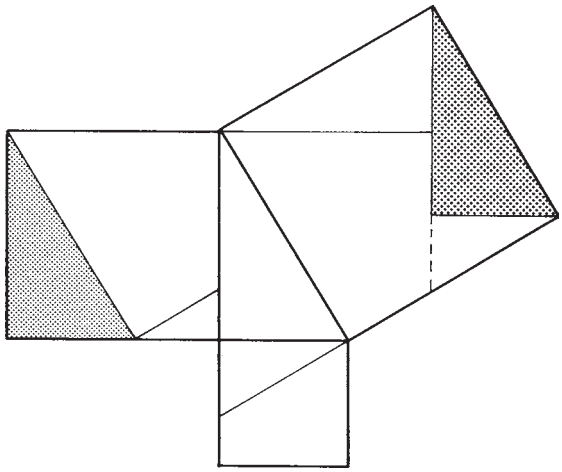


Рис. 8.14

ворачивать треугольники. Нижнее положение — рис.8.10, верхнее — рис.8.11.

Большое преимущество этого рассмотрения: сумма квадратов катетов выступает как *единое* целое.

Два новых ракурса: пятиугольник принадлежит как квадрату гипотенузы, так и обоим квадратам катетов (рис. 8.12). Пунктирная линия делит его на две части. Снова изобразим квадраты катетов с внешней стороны (рис. 8.13); тогда две части пятиугольника можно переместить как в квадрат гипотенузы, так и в квадраты катетов.

Легко увидеть, что в a^2 и c^2 дублируется и исходный треугольник (рис. 8.14).

Суммарный остаток в квадратах катетов снова является треугольником (рис. 8.15), ибо оба основания $a–b$ и b вместе дают a. Верхний треугольник в квадрате гипотенузы может быть соответствующим образом разделен на две части.

Квадраты поделены теперь так (рис.8.16), что в квадрате гипотенузы и в обоих квадратах катетов вместе содержится

по 5 частей. Таким образом, квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Такое доказательство называют доказательством через разложение или замощение. Как паркетный пол состоит из кусков, так и здесь квадраты. Вариантов таких доказательств много.

Следующее рассмотрение — подготовка к математической сказке Гвидо Гаука “Как Пифагор открыл свою теорему”.

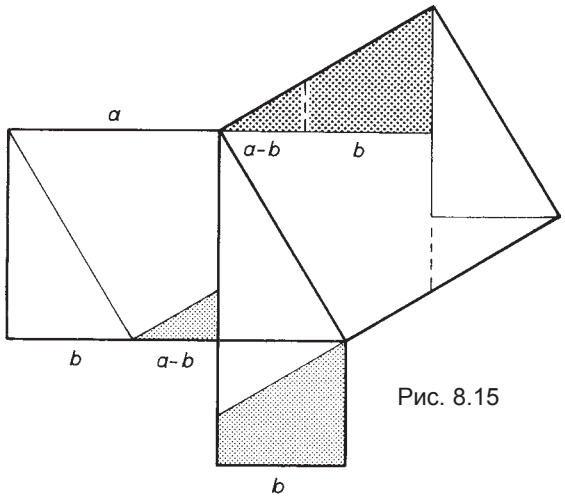


Рис. 8.15

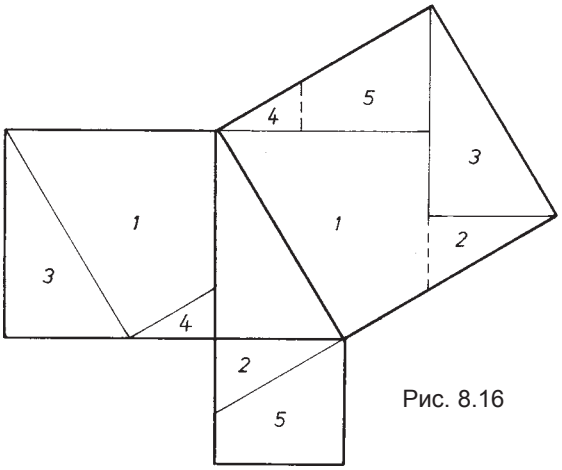


Рис. 8.16

9. “Как Пифагор открыл свою теорему” Математическая сказка Гвидо Гаука[1]

Подготовительные рассмотрения

Особенно легко увидеть теорему Пифагора в равнобедренном прямоугольном треугольнике (рис. 9.1). Достаточно разделить квадрат гипотенузы и два квадрата катетов на 4 равнобедренных прямоугольных треугольника; все они конгруэнтны исходному.

Можно ли выйти из положения, если треугольник не равнобедренный? Попробуем сохранить основной принцип: и сверху, и снизу мы прибавляем по четыре конгруэнтных исходному треугольника.

Построить *законченный* квадрат гипотенузы в этом случае не удастся, ведь вершины *C* нижних треугольников больше не совпадают, они сдвинуты друг по отношению к другу (рис. 9.2). Углы α и β дополняют друг друга до 90°, так что гипотенузы *C* остаются сторонами квадрата гипотенузы. Но внутри дырка! Дырка квадратная, со стороной *b–a* (рис. 9.3). А вверху? Вверху получаются замкнутые фигуры, но не квадраты а прямоугольники (рис. 9.4).

Можно представить себе, как рис. 9.1 превращается в рис. 9.5. Какие части рис. 9.5 равновелики? Оба прямоугольника вместе равны по площади “дырявому” квадрату гипотенузы!

[1] Гвидо Гаук (1845–1905) – выдающийся геометр, публиковал работы по начертательной геометрии; первый ректор Политехнического института г.Берлина, профессор.

Сказка появилась в 1940 году в первом томе *Математико-астрономического листка*, издаваемого Математико-астрономической секцией Гетеанума под редакцией Л.Лохер-Эрнста.

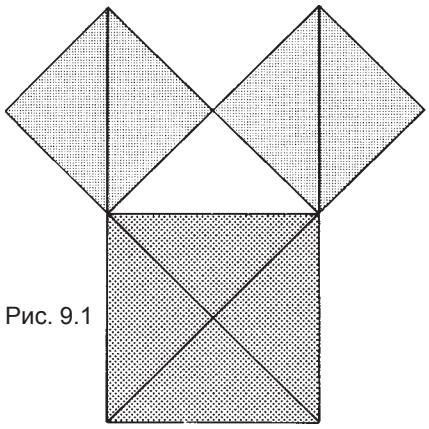


Рис. 9.1

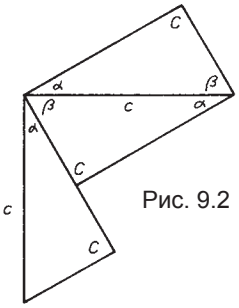


Рис. 9.2

Рис. 9.3

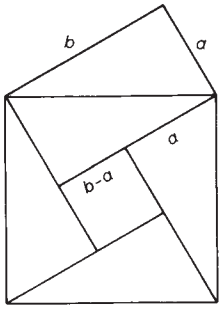
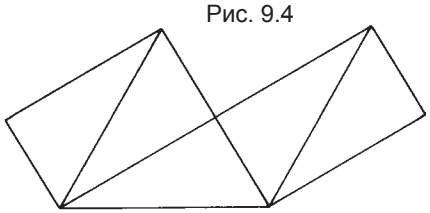


Рис. 9.4



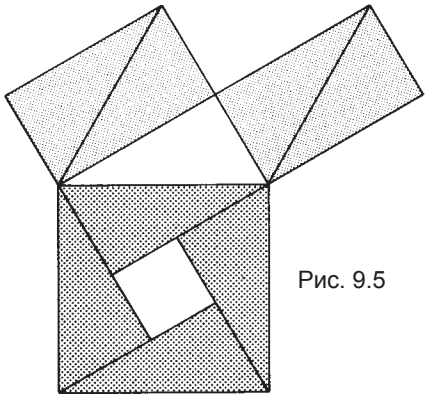
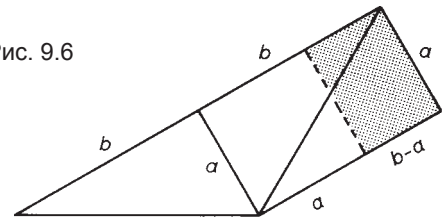


Рис. 9.5

Рис. 9.6



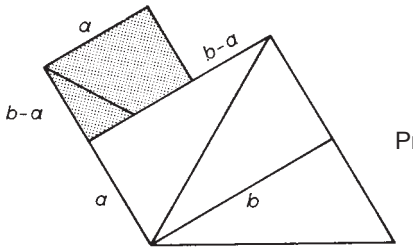


Рис. 9.7

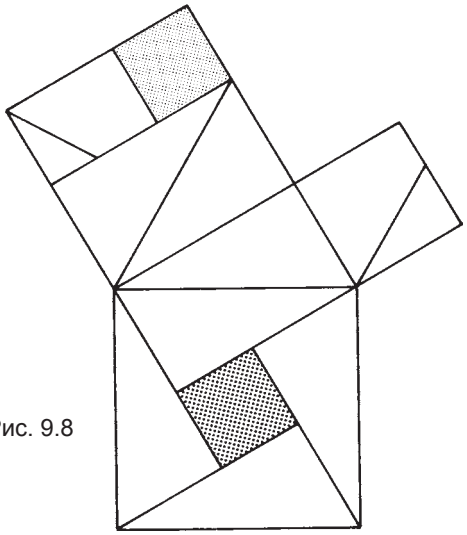


Рис. 9.8

Но это еще не теорема Пифагора. В ней фигурирует весь квадрат гипотенузы и квадраты катетов, а не прямоугольники. Нельзя ли в соответствии с формулировкой перестроить чертеж?

Отрежем от прямоугольника справа столько, чтобы отстался a^2 (рис. 9.6). Отрезанная часть — прямоугольник со сторонами $b - a$, a. Его мы прибавим к левому прямоугольнику так, что теперь стороны a и $b - a$ взаимнодополняют друг друга до b (рис. 9.7). Почти b^2! Справа вверху не хватает только квадрата со стороной $b - a$. То есть как раз того, чего не хватает квадрату гипотенузы (рис. 9.8). Всё.

(Одно практическое замечание: при построении обратите внимание на то, чтобы меньший катет не равнялся половине большего. В этом случае дырка равна квадрату меньшего катета, и можно прийти к ошибочному заключению, что так бывает всегда.)

Обратите внимание, что математическая сказка Гвидо Гаука — одновременно чистая поэзия и точное описание проведенного рассуждения — одно не исключает другое!

Как Пифагор открыл свою теорему

(Из наследия Гвидо Гаука, просмотрено Хедвигом Гауком)

В Древней Греции, недалеко от города Кротона, располагалась колония названием Тригония. Население ее состояло из одних прямоугольных треугольников. Каждый треугольник имел гипотенузу и два катета, которые и составляли все его богатство. Но главой хозяйства была гипотенуза. Равнобедренные треугольники составляли благородное сословие (рис. 9.1). У других треугольников длины катетов различались (рис. 9.2).

И вот однажды в одном из равнобедренных треугольников

разыгрался спор между гипотенузой и катетами. Катеты заявляли, что они не желали бы больше слушать поучения от гипотенузы, ведь вдвоем-то они длиннее ее. На них зиждется все достояние треугольника, они окружают прямой угол. Гипотенуза на это ответила, что главное достояние прямоугольного треугольника принадлежит ей — если бы она не стягивала катеты, вряд ли бы сохранился прямой угол.

В это время в Кротоне жил мудрец по имени Пифагор. Он был другом треугольников, каждый вечер он прогуливался по Тригонии. И вот однажды он проходил мимо прямоугольного треугольника, услышал шум, остановился и спросил о причине спора. Узнав, в чем дело, он обратился к катетам: “Дело не в том, что вы длиннее, дело во внутренней ценности, в вашем вкладе. Чтобы решить ваш спор, я должен увидеть вас в деле. Итак, за работу! Надевайте-ка фартуки, тогда и посмотрим”.

Спорщики посмотрели на него широко открытыми глазами: ”Фартуки? Но у нас их нет”.

“Что? — удивился Пифагор. — У вас нет фартуков? Только рабочая одежда дает человеку цену, без нее он просто ворует время. Отправляйтесь к скорняку, я помогу вам сшить фартуки”.

Но у скорняка на складе не было кожи подходящей длины. Правда, хватало остатков, но они были не больше самого треугольника.

“Ничего, — сказал Пифагор, — попробуем сшить из нескольких кусков. Чтобы все было точно, используем в качестве шаблона сам треугольник“. Так он и сделал и нарезал 8 прямоугольных равнобедренных треугольников, совершенно одинакового размера.

Из них он взял 4 и сшил их по катетам, так что гипотенузы оказались вовне, и их два острых угла образовывали вместе угол 90°. Получился фартук в форме квадрата, сторона которого равна гипотенузе. Закончив работу, он повязал фартук гипотенузе на пояс (рис. 9.1).

Четыре других треугольника он сшил гипотенузами, полу-

чились два квадратных фартука с длиной стороны, равной катету, и повязал их на пояса катетам (рис. 9.1).

И сказал: “Посмотрите друг на друга, все фартуки квадратные, квадрат гипотенузы состоит из 4 треугольников, а оба квадрата катетов состоят также из 4 треугольников. По фартукам и оцените друг друга. Гипотенуза, выходит, равнозначна двум катетам. Так что никто да не возвышается над другими. Терпите друг друга и работайте вместе в мире и уважении”.

Так и было порешено. Стороны помирились и отправились домой, подняв фартуки на стяги. Это сверх всякой меры понравилось другим треугольникам в Тригонии. И только соседний треугольник узнал, откуда взялись фартуки, как отправился он к Пифагору и попросил его об услуге. Тот почесал в затылке и сказал: “Гм, это не так-то легко. Сосед-то был равнобедренным, а твои катеты не равны. Но попробуем!”

С этими словами повел он просителя к скорняку, вырезал из остатков снова 8 треугольников, используя в качестве шаблона опять-таки величину исходного треугольника. 4 из 8 он попробовал снова сшить в квадрат, пришивая меньшие катеты к большим, так что гипотенузы смотрели всегда наружу, а на концах их больших острых углов треугольник соединялся с меньшим углом, образуя 90°. Опять получился квадратный фартук, только в середине образовалась дырка, по форме квадратная, со стороной, равной точно разности катетов (рис. 9.3).

“Ничего, — сказал Пифагор, — потом пришьем заплату. Сперва составим 4 других треугольника”. И повязал фартук на гипотенузу.

Четыре оставшихся треугольника он сшил по два гипотенузами друг к другу, так что меньший острый угол треугольника пришелся на больший и вместе они составили прямой угол. Правда, получились не квадраты, а два прямоугольника (рис.9.4).

Пифагор не смутился, повязал один прямоугольник длинной стороной на больший катет, другой прямоугольник короткой стороной на меньший катет и сказал: ”Один фартук слишком короток, другой — слишком длинен. Нужно будет поправить”.

Затем он отрезал кусок от длинного фартука, так что остался квадрат (рис. 9.6). Отрезанная часть была прямоугольной формы, одна ее сторона равнялась малому катету, а другая — разнице между катетами. Отрезанный прямоугольник он пришил к другому фартуку, так что сторона, равная разнице катетов, пришлась на продолжение узкой стороны прямоугольного фартука. Сторона сразу удлинилась до большего катета, а фартук стал почти квадратным, только в углу осталась дыра (рис. 9.7).

Посмотрев на нее, Пифагор сказал: “Она квадратная, причем по ширине точно равна разнице катетов. Дырка-то, как в фартуке на гипотенузе!” С этими словами он вырезал по одной мерке два квадратных куска и зашил дыры. Работая, он становился все серьезней и задумчивей — и вдруг подпрыгнул от радости и воскликнул: “Ура! Я открыл теорему Пифагора! Только посмотрите! (рис. 9.8) Квадрат гипотенузы сшит точно из тех же кусков, что и квадраты катетов — из 4 треугольников и заплаты. Значит, теорема “работает” и для прямоугольных треугольников с неравными катетами: *“Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов”.* Это называется теоремой Пифагора. Вы, прямоугольные треугольники, можете гордиться. Идите домой и возвестите эту новость своим друзьям!”

Исполненный радости, треугольник поспешил с новыми фартуками домой, рассказывая новость на каждом углу Тригонии. Поднялась волна ликования — всюду скандировали: “Квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов”. Всякий треугольник хотел лично удостовериться в верности теоремы. Треугольники бросились к Пифагору, прося его сшить и им фартуки.

Но Пифагор ответил: “Хорошая кожа дорога. Запасы скорняка использованы, новых нет. Но мы добудем кожу!”

С этими словами Пифагор отправился в хлев и выбрал 100 жирных быков. Их он принес в жертву богам за то, что они подарили ему такую красивую теорему. А шкуры отправились к скорняку, чтобы из них друзьям Пифагора пошили новые фартуки. А потом он пригласил всех на жертвенную трапезу, продолжавшуюся всю ночь.

10. Извлечение корня — какое число является полным квадратом?

Извлечение корня является важной операцией как в педагогическом, так и в предметном смысле! Мы рассмотрим ее подробно в связи с теоремой Пифагора. Ибо извлечение корня появляется в приложениях к ней.

Пример 1:

Даны катеты прямоугольного треугольника: a=45 мм и b=28 мм. Чему равна гипотенуза? Ученики должны по возможности точно изобразить треугольник и затем измерить гипотенузу (рис. 10.1). Не у всех ответ будет одинаковым, числа будут колебаться от 52 до 54 мм. Если измерения расходятся еще больше, значит, неточен чертеж. Но какое из значений верное? Его можно определить только через взаимосвязь сторон, то есть через теорему Пифагора.

$$c^2=a^2+b^2$$

$a^2=45^2$	$b^2=28^2$	$c^2=a^2+b^2$
$45 \cdot 45$	$28 \cdot 28$	
225	224	2025
180	56	+784
2025 мм^2	784 мм^2	2809 мм^2

(Напоминаем: все длины измерены в мм, все площади — в мм^2. В ключевых местах мы будем указывать мм^2, однако делать это постоянно нецелесообразно — очень усложняется запись.)

Первое, что мы можем посчитать, — это *площадь* квадрата гипотенузы: c^2=2809 мм^2. Но как из площади получить сторону c? Только извлекая корень! В вычислительном смысле задача состоит в определении числа, которое возводится

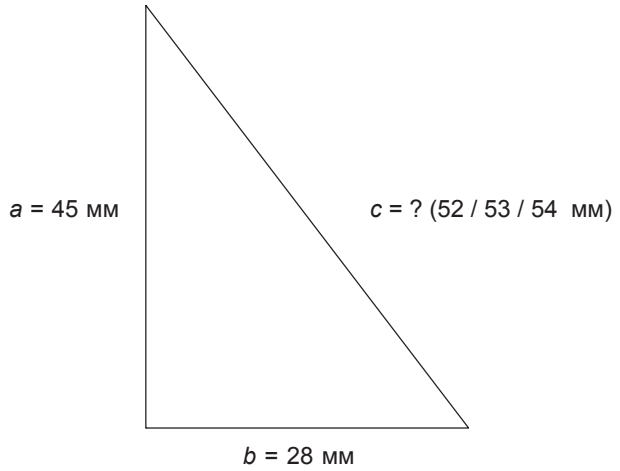


Рис. 10.1

в квадрат, то есть умножается само на себя; и при этом получается 2809. Проверим результаты наших измерений: 52 мм, 53 мм, 54 мм.

52 · 52 (мм · мм)
104
260
2704 мм^2

(Единицы измерений можно приписать после проведения вычислений.)

2704 мм^2 — площадь квадрата со стороной 52 мм: слишком мало.

Попробуем следующее число:

53 · 53 (мм · мм)
159
265
2704 мм^2

Наша площадь! Итак, гипотенуза — 53 мм.

Пример 2:

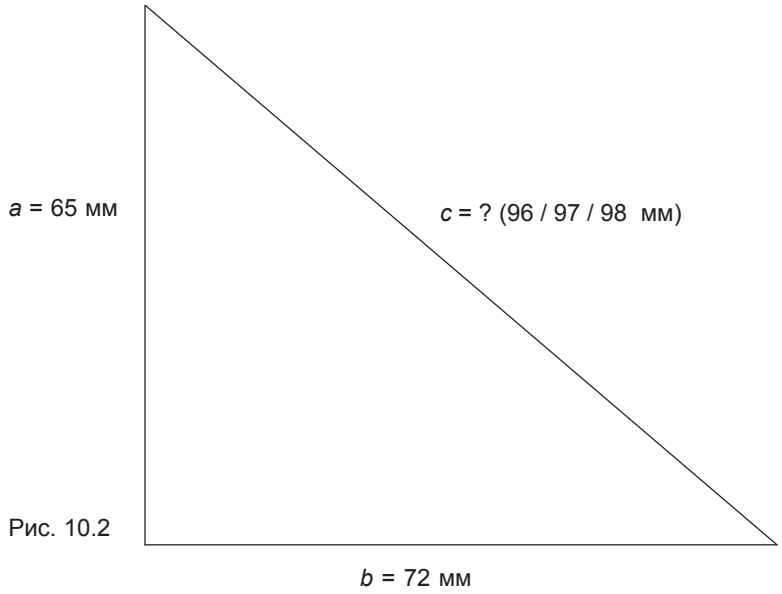


Рис. 10.2

a=65 мм, *b*=72 мм (рис.10.2)

Из чертежа видно: *c* может равняться 96–98мм. Вычисляем:

a^2	b^2	$c^2=a^2+b^2$
65 · 65	72 · 72	
325	144	4225
390	504	+5184
4225 мм^2	5184 мм^2	9409 мм^2

Проверим результаты измерений:

96 · 96	97 · 97
576	679
864	873
9216 мм^2:	9409 мм^2:
слишком мало!	точно!

Итак, в прямоугольном треугольнике с катетами 65 и 72 мм

гипотенуза равна 97 мм.

Можно было бы и сразу предположить, что из всех измерений подходит только 97 — по последней цифре. Ведь только числа, оканчивающиеся на 3 и 7, дают в квадрате последнюю — 9 (9409 мм^2).

Рассмотрим последние цифры полных квадратов от 1^2 до 20^2:

$1^2 = 1$	$11^2 = 121$
$2^2 = 4$	$12^2 = 144$
$3^2 = 9$	$13^2 = 169$
$4^2 = 16$	$14^2 = 196$
$5^2 = 25$	$15^2 = 225$
$6^2 = 36$	$16^2 = 256$
$7^2 = 49$	$17^2 = 289$
$8^2 = 64$	$18^2 = 324$
$9^2 = 81$	$19^2 = 361$
$10^2 = 100$	$20^2 = 400$

Число, которое возводится в квадрат, мы назовем *основанием*. Посмотрим на зависимость между последней цифрой основания и квадрата:

Последняя цифра основания	Последняя цифра квадрата
0	0
1 или 9	1
2 или 8	4
3 или 7	9
4 или 6	6
5	5

Легко увидеть, что эти взаимозависимости распространяются и на числа любого порядка.

Пример 3:

a=39 мм, *b*=80 мм. (Прежде чем считать, нарисуем!) Возможные размеры *c* из рисунка: 88, 89, 90 мм (рис.10.3). Вы-

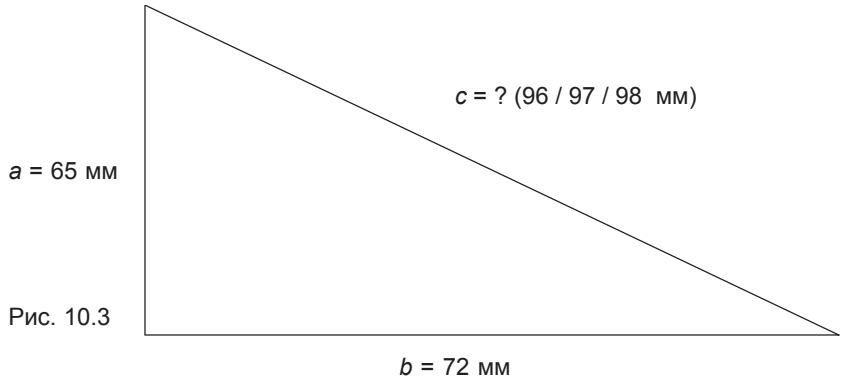


Рис. 10.3

числения:

a^2	b^2	$c^2=a^2+b^2$
39 · 39	80 · 80	
351	6400	1521
117		+6400
1521 мм^2	6400 мм^2	7921 мм^2

Последняя цифра c^2 — 1. В качестве длины стороны можно рассматривать 89 мм.

89 · 89
801
712
7921 мм^2: верно!

Гипотенуза равна 89 мм.

Примеры ставят перед нами два вопроса:

1. Откуда мы знаем, что вычисленное по данным катетам a и b число c^2 является квадратом целого числа? Если теорема Пифагора справедлива для любого треугольника, то c^2 в общем случае не является таковым.

Пример: a=12 см, b=7 см, c^2=144+49=193 см^2. Но 193 не

является полным квадратом, цифра 3 никогда не появляется на последнем месте при возведении во вторую степень. Мы знаем первый больший, чем 193, полный квадрат — $196=14^2$ и меньший — $13^2=169$. Итак, гипотенуза должна быть между 13 и 14 см — ясно, что ближе к 14 см. Чертеж уже не поможет.

Тем самым мы подходим ко второму вопросу:

2. Как чисто арифметически определить гипотенузу c по c^2, если чертеж не дает больше прямых указаний или если c — не целое число?

К первому вопросу: уже в древнеегипетскую эпоху жрецы знали, что треугольник, стороны которого относятся как 3 : 4 : 5, особенный, а именно имеет прямой угол. Они пользовались такими треугольниками, чтобы получить прямой угол на строительных площадках (например, при строительстве пирамид). На веревке завязывались 13 узлов, между которыми располагались 12 равных отрезков. Затем веревка клалась на землю в форме треугольника со сторонами 3, 4, 5. При этом знали: короткие стороны заключают точный прямой угол.

В Индии знали, что треугольник со сторонами 5, 12, 13 — прямоугольный: $5^2+12^2=25+144=169=13^2$.

Тройки a, b, c со свойством $c^2=a^2+b^2$ называют *Пифагоровыми тройками*. Зная, как легко найти некоторые из них.

Будем исходить из двух вспомогательных чисел u и v, на место которых можно подставить любые натуральные числа. Теперь можно по следующим формулам сосчитать a, b, c:

$a=u^2-v^2$ $\qquad$ $b=2uv$ $\qquad$ $c=u^2+v^2$

Пример 1: $u=7$ $\qquad$ $v=2$

$a=u^2-v^2$	$b=2uv$	$c=u^2+v^2$
$a=49-4=45$	$b=2\cdot 7\cdot 2=28$	$c=49+4=53$

Это значения a, b, c первого нашего примера.

$45^2 = 2025$

$28^2 = 784$

$2809 = 53^2$

Пример 2: (a=65 см, b=72 см, c=97 см)

Мы получили эту тройку исходя из $u=7$ $v=2$

$a=81-16=65$ $b=2 \cdot 9 \cdot 4$ $c=81+16=97$

$65^2 = 4225$

$72^2 = 5184$

$9409 = 97^2$

Пример 3: $u=9$ $v=5$

$a=81-25=56$ $b=2 \cdot 9 \cdot 5=90$ $c=81+25=106$

$56^2 = 3136$

$90^2 = 8100$

$11236 = 106^2$

Для u=2 и v=1 получаем египетский треугольник; для u=3 и v=2 — индийский (сосчитайте!).

Действительно ли каждый раз получается Пифагорова тройка? Да. Мы можем установить это на сколь угодно многих примерах. И это необходимо сделать; u и v можно выбирать произвольными, лучше u больше, чем v (если $u < v$, тогда a — отрицательно; хотя a^2, конечно, снова положительно, и $a^2+b^2=c^2$ все равно выполняется).

Можно ли удостовериться в справедливости общего случая? Да, выбирая для u и v не конкретные числа, а производя вычисления с буквами — алгебраически; возводя в квадрат формулы для a, b и c.

$a^2=(u^2-v^2)^2$; $b^2=(2uv)^2$; $c^2=(u^2+v^2)^2$.

Для вычислений нам понадобятся *биноминальные формулы*: в главе 7 мы уже познакомились с алгебраическими вычислениями[1]. В формулах для a^2 и c^2 появляются квадраты квадратов: $(u^2)^2$ и $(v^2)^2$. Их можно записать как 4-ю сте-

пень, ибо:

$(u^2)^2 = u^2 \cdot u^2 = u^4$
$(v^2)^2 = v^2 \cdot v^2 = v^4$

Применяя биноминальные формулы, получим:

$a^2=(u^2-v^2)^2 = u^4 - 2u^2v^2 + v^4$
$b^2=(2uv)^2=4u^2v^2$
$c^2=(u^2+v^2)^2 = u^4 + 2u^2v^2 + v^4$

Беглый взгляд на две первые строки тотчас убеждает в том, что, если их сложить, получится третья: $2u^2v^2+4u^2v^2=2u^2v^2$. Четвертые степени остаются.

Здесь мы наглядно переживаем ценность алгебры: она открывает взаимосвязи, верные для всех чисел. Если a,b,c вычисляются по u,v указанным образом, тогда всегда $a^2+b^2=c^2$. До чего же гениален был первооткрыватель такой формулы! Для уроков математики она незаменима, с ее помощью в нашем распоряжении всегда готовые примеры (см. таблицу в конце главы).

Теперь ко второму вопросу: как чисто технически отыскать гипотенузу по ее квадрату?

Пример 1:

Снова обратимся к первому примеру: a=45 мм, b=28 мм, c^2=2809 мм^2. Вопрос звучит так: какое число, возведенное в квадрат, дает 2809? Его называют обычно “корнем” из 2809. Из этого корня 2809 как бы вырастает, подобно квадрату, вырастающему из стороны. Вопрос о корне символически записывается так:

$$= ?$$

Значок $\sqrt{}$ происходит от латинской буквы *r* (сокращение латинского *rad*ix – “корень”). Дуга *r* удлинилась до штриха, проводимого над числом, из которого извлекается корень. Это число, в данном случае 2809, называют подкоренным

[1] См. *А.Бернхардт*. Алгебра для 7-го и 8-го классов вальдорфской школы.

выражением. Извлечь корень из 2809 — это ответить на вопрос: “Откуда возникает 2809?” Извлечем же корень на свет божий!

Но как? Вначале мы должны поверить в лучшее и оперировать с полными квадратами 1^2–9^2, 10^2–90^2. Ученики, естественно, должны знать эти числа наизусть.

$1^2 = 1$	$10^2 = 100$
$2^2 = 4$	$20^2 = 400$
$3^2 = 9$	$30^2 = 900$
$4^2 = 16$	$40^2 = 1600$
$5^2 = 25$	$50^2 = 2500$
$6^2 = 36$	$60^2 = 3600$
$7^2 = 49$	$70^2 = 4900$
$8^2 = 64$	$80^2 = 6400$
$9^2 = 81$	$90^2 = 8100$

должен лежать между 50 и 60, ибо 2809 лежит между $2500=50^2$ и $3600=60^2$. Десятки, таким образом, определены. Поскольку мы ищем путь, годный для всех случаев, не ограничимся просто поиском последней цифры.

Обозначим количество единиц буквой e; тогда

$$= 50+e$$

Возведем в квадрат:

$$(50+e)^2 = 2809$$

Применим биноминальную формулу:

$$50^2+2 \cdot 50 \cdot e+e^2 = 2809$$

$$2500+100 \cdot e+e^2 = 2809 \quad \Big| -2500$$

$$100 \cdot e+e^2 = 309$$

Отсюда немедленно следует, что $e=3$, ведь

$$100 \cdot 3+3^2 = 3\ 09$$

Итак:

$$= 50+3 = 53$$

Пример 2: $a=65$; $b=72$; $c^2=9409$.

$$= 90+e,$$

поскольку 9409 лежит между $8100=90^2$ и $10000=100^2$ ($8100<9409<10000$).

Возводим в квадрат:

$$9409=(90+e)^2$$
$$9409=90^2+2 \cdot 90 \cdot e+e^2$$
$$9409=8100+180 \cdot e+e^2 \quad \Big| -8100$$
$$1309=180 \cdot e+e^2$$

На первый взгляд *e* определить не проще, чем раньше. Найдем его, разделив 1309 на 180:

$$\begin{array}{l} 1309:180=7 \quad \text{остаток } 49 \\ -1260 \\ \underline{\;\;49} \end{array}$$

Подставим в последнее уравнение вместо *e* число 7:

$$180 \cdot e+e^2=180 \cdot 7+7^2=1260+49=1309$$

Равенство выполнено, е — действительно 7:

$$= 90+7=97.$$

В основе этого вычислительного процесса как *важнейшая составляющая* лежит биноминальная формула. Практически важно вычитание из 8100 и деление 1309 на 180. Сведем вычисления воедино, удобно расположив их:

$$= 90+e$$

$$\begin{array}{l} 9409 \\ -8100 \\ \underline{1309} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1309:180=7 \quad \text{остаток } 49 \\ 1260 \\ \underline{\;\;49}=e^2 \\ \;\;e=7 \end{array}$$

$$= 90+7=97$$

Можно записать эти вычисления короче:

$= 90+e$

-8100

$1309:180=7=e$

-1260

$49=e^2$

$= 90+7=97$

Другие примеры: $a=40$ $b=42$

$40^2=1600$

$42^2=1764$

$3364=c^2$

$= 50+e$ $(2500<3364<3600)$

-2500

$864:100=8=e$

-800

$64=e^2$

$= 50+8=58$

Всегда нужно делить на *удвоенное* число десятков (причина — удвоенное произведение в биноминальной формуле).

Примеры не в связи с теоремой Пифагора:

$= 60+e$ $(3600<4096<4900)$

-3600

$496:120=4=e$

-480

$16=4^2=e^2$

$= 60+4=64$

$= 60+e=60+7=67$

-3600

$889:120=7=e$

-840

$49=7^2=e^2$

$=80+e=80+3=83$

-6400

$489:160=3=e$

-480

$9=3^2=e^2$

Найденное при делении *e* можно, завершив вычисления, поместить в первую строку. Чтобы на уроках не было недостатка в примерах такого рода, в конце главы приведена таблица всех квадратов от 0^2 до 100^2.

Нами обсуждена первая форма извлечения корня. Ее преимущество состоит в том, что сразу видно, на чем она (биноминальная формула) основана. Если ученики освоили эту первую форму, можно перейти ко второй, когда опускается все лишнее и вычислительный процесс проходит в максимально лаконичной форме. Для последнего примера вторая форма извлечения корня выглядит так:

$= 83$

-64

$48'9:16_3$

-489

0

Выстроим вычисления шаг за шагом:

1. Разделить подкоренное выражение, начиная с младших разрядов, от десятичной точки, на группы по две цифры.

2. Написать под первой группой ближайший (но меньший) полный квадрат (64) и извлечь из него корень (8).

$= 8$

64

3. Вычесть квадрат и снести вниз следующую группу.

$= 8$

-64

489

4. У остатка (489) отчеркнуть апострофом последнюю цифру и разделить 48 на 16 (удвоенная 8).

$$\begin{array}{l} \qquad\quad = 8 \\ -\underline{64} \\ \quad 48'9:16 \end{array}$$

5. Частное (3) приписать к результату и маленькими цифрами (как индекс) к 16.

$$\begin{array}{l} = 8 \\ -\underline{64} \\ \quad 48'9:16_3 \end{array}$$

6. Делитель 16_3 умножить на 3 и произведение (489) записать под остатком (также 489). Вычесть (разность 0). Корень извлекается без остатка.

$$\begin{array}{l} \qquad\quad = 8 \\ -\underline{64} \\ \quad 48'9:16_3 \\ \ \underline{-489} \\ \quad\ \ 0 \end{array}$$

Это окончательная форма извлечения корня. Ясно, как она согласуется с первой. Все лишние цифры отбрасываются — оба нуля в 6400 и нуль в 80. Вместо деления 489 на 160, делят 48 на 16. Приписывая результат деления (3) к 16 и умножая затем на 3, мы получаем одним махом 3^2 и $3 \cdot 160$. Едва ли возможно найти более короткий и удобный способ записи. Ученики быстро вживаются в ритм этого процесса. Вычисления, конечно, рутинны, но при этом они должны быть выполнены и записаны максимально аккуратно. Следует всегда удерживать в сознании, на чем строится алгоритм — а именно на биноминальной формуле!

Конечно, есть только один путь прийти к уверенности в вычислениях — это постоянные упражнения. Вот два других уже рассмотренных нами примера в окончательной форме:

$$\begin{array}{l} \qquad\quad = 67 \\ -\underline{36} \\ \quad 88'9:12_7 \\ \ \underline{-889} \\ \qquad\ \ 0 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{l} \qquad\quad = 64 \\ -\underline{36} \\ \quad 49'6:12_4 \\ \ \underline{-496} \\ \qquad\ \ 0 \end{array}$$

Результат деления приписывается к делителю как индекс, чтобы сразу было ясно: это число — промежуточное. Если в процессе вычисления обнаруживается ошибка и требуется проверка, то индексная запись оказывается подспорьем.

Может случиться, что первая группа сама окажется полным квадратом. Тогда из нее, как положено, извлекается корень. Пример:

```
        = 41
–16
 08’1:8₁
 –81
   0
```

Первая группа может состоять и из *одного* числа.

Примеры:

```
      = 22                  = 24
–4                      –4
 08’4:4₂                 17’6:4
 –84                    –176
   0                       0

      = 28
–4
 38’4:4₈
–384
   0
```

В последнем примере возникает деление 38 на 4. Подходит 9! Но нужно помнить, что 9 умножается затем и на само себя (e^2); 9 · 49=441, что превосходит 384. Поэтому — только 8.

Если подкоренное выражение более чем четвертого порядка, алгоритм работает в принципе так же. Вначале делим на группы по две цифры (первая группа, бывает, состоит из

одной цифры). Затем квадрат записывается под *передней* группой и так далее.

Пример:

```
                = 43
–16
  28’3:8₃
–249
   34
```

Шаги повторяются: сносится следующая группа, апострофом отчеркивается один порядок, производится деление на удвоенный результат и так далее.

```
                = 434
  ...
  345’6:86₄
–3456
     0
```

Дальнейшие примеры:

```
                = 364
–9
  42’4:6₆                (42:6 — только 6 раз!)
–396
   289’6:72₄
  –2896
       0

                = 412
–16
  09’7:8₁                (42:4 не 10 и не 9,
  –81                    а только 8! Ибо 8²=64 —
   1644:82₂              достаточно много!)
  –1644
     0
```

= 287

–4

42’3:4_8

–384

396’9:56_7

–3969

0

= 314

–9

08’5:6_1

–61

249’6:62_4

–2496

0

= 305

–9

03’0:6_0

–0

302’5:60_5

3025

0

Если подкоренное выражение — десятичная дробь с цифрами после запятой, тогда она делится на группы *по две цифры от запятой вперед и назад*. Результат имеет столько *цифр* перед запятой, сколько *групп* перед запятой у подкоренного выражения.

Примеры:

= 0,176

–1

20’9:2_7

–189

207’6:34_6

–2076

0

Когда мы делим на удвоенный результат, на запятую внимание не обращается. (Причина — в остатке мы ее тоже опускаем.) На предыдущем примере: второе деление на 146, а не на 14,6.

= 2,85

–4
41’2:4_8
–384
282’5:56_5
–2825
0

= 92,8

–81
51’1:18_2
–364
1478’4:184_8
–14784
0

Если подкоренное выражение начинается с 0,... то оно также делится от запятой *направо* на группы по 2 цифры и результат начинается с 0,... .

Примеры:

= 0,45

–16
42’5:8_5
–425
0

= 0,176

–1
20’9:2_7
–189
207’6:34_6
–2076
0

= 0,067

–36

88’9:12$_7$

–889

0

= 0,0026

–4

27’6:4$_6$

–276

0

Количество *нулей* после запятой у корня соответствует числу *групп по два нуля* после запятой у подкоренного выражения.

Во всех приведенных примерах остаток был нулевым, корни извлекались до конца. Разумеется, работая с классом, последовательность примеров выстраиваем постепенно. При этом все вопросы, связанные с техникой извлечения, решаются по возможности полно.

Особенно важны неизвлекаемые корни. Эту тему мы будем обсуждать в главе 15.

Если в прямоугольном треугольнике даны гипотенуза и катет, тогда с помощью теоремы Пифагора можно найти второй катет. Квадрат искомого катета равен *разнице* между квадратом гипотенузы и квадратом первого катета.

Пример: *a*=32 мм*c*=68 мм *b*=?

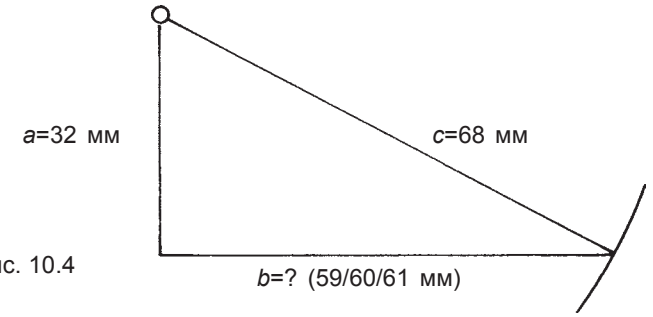


Рис. 10.4

Если необходимо начертить прямоугольный треугольник, строится прямой угол, на одной стороне которого от вершины угла откладывается сторона *a* — возникает вершина треугольника, и далее строится окружность радиуса *c* с центром в этой вершине.

Вычисления: $b^2 = c^2 - a^2$

c^2	a^2	
$68 \cdot 68$	$32 \cdot 32$	$c^2=4624$
544	64	$a^2=1024$ | –
408	96	
4624	1024	$b^2=3600$
		$b =$ = 60 мм

Задачи на извлечение корня

1. Извлеки корень из следующих чисел:

1764	5625	15129
2209	6241	17424
2704	6889	70225
3136	7396	76176
4096	9025	94249
4489	9409	97969

101124	388129
132496	413449
188356	506944
226576	538756
254016	669124
297025	824464

2. Извлеки корень из следующих десятичных дробей:

13,69	114,49	10,3041
24,01	136,89	15,0544

51,84	201,64	17,1396
84,64	812,25	20,7025
96,04	823,69	24,2064
98,01	973,44	32,1489

3. Извлеки корень из следующих чисел, меньших 1:

0,1156	0,001521
0,1936	0,001849
0,3721	0,004624
0,0576	0,005929
0,0729	0,000784
0,0961	0,000841

4. Смешанные примеры:

53361	672400
615,04	0,8281
0,3969	3,0276
4,84	0,034596
53,29	368,64
0,005476	42436

5. Катеты прямоугольного треугольника равны *a* и *b*, гипотенуза — *c*. Вычисли недостающую сторону по двум данным:

a	45	55	33	39	48	54		
b	28	48	56				96	24
c				89	80	90	100	51
a	63	70		75		45	165	
b	60	24	84		180	108		240
c			91	85	183		219	267

Таблица квадратов

n	n^2	n	n^2	n	n^2	n	n^2
0	0	25	625	50	2500	75	5625
1	1	26	676	51	2601	76	5776
2	4	27	729	52	2704	77	5929
3	9	28	784	53	2809	78	6084
4	16	29	841	54	2916	79	6241
5	25	30	900	55	3025	80	6400
6	36	31	961	56	3136	81	6561
7	49	32	1024	57	3249	82	6724
8	64	33	1089	58	3364	83	6889
9	81	34	1156	59	3481	84	7056
10	100	35	1225	60	3600	85	7225
11	121	36	1296	61	3721	86	7396
12	144	37	1369	62	3844	87	7569
13	169	38	1444	63	3969	88	7744
14	196	39	1521	64	4096	89	7921
15	225	40	1600	65	4225	90	8100
16	256	41	1681	66	4356	91	8281
17	289	42	1764	67	4489	92	8464
18	324	43	1849	68	4624	93	8649
19	361	44	1936	69	4761	94	8836
20	400	45	2025	70	4900	95	9025
21	441	46	2116	71	5041	96	9216
22	484	47	2209	72	5184	97	9409
23	529	48	2304	73	5329	98	9604
24	576	49	2401	74	5476	99	9801
						100	10000

Таблица Пифагоровых троек

Вычисляются по формулам для различных значений вспомогательных величин *u* и *v*:

$a=u^2-v^2$ $b=2uv$ $c=u^2+v^2$

Удвоение, утроение, учетверение ... Пифагоровых троек снова даст Пифагорову тройку.

u	*v*	*a*	*b*	*c*	a^2	b^2	c^2
2	1	3	4	5	9	16	25
3	2	5	12	13	25	144	169
4	1	15	8	17	225	64	289
4	3	7	24	25	49	576	625
5	2	21	20	29	441	400	841
5	4	9	40	41	81	1600	1681
6	1	35	12	37	1225	144	1369
6	3	27	36	45	729	1296	2025
6	5	11	60	61	121	3600	3721
7	2	45	28	53	2025	784	2809
7	4	33	56	65	1089	3136	4225
7	6	13	84	85	169	7056	7225
8	1	63	16	65	3969	256	4225
8	3	55	48	73	3025	2304	5329
8	5	39	80	89	1521	6400	7921
8	7	15	112	113	225	12544	12769
9	2	77	36	85	5929	1296	7225
9	4	65	72	97	4225	5184	9409
9	6	45	108	117	2025	11664	13689
9	8	17	144	145	289	20736	21025
10	1	99	20	101	9801	400	10201
10	3	91	60	109	8281	3600	11881
10	5	75	100	125	5625	10000	15625
10	7	51	140	149	2601	19600	22201
10	9	19	180	181	361	32400	32761

11. Применения теоремы Пифагора

Теорема Пифагора каждодневно применяется во всем мире для решения геометрических проблем в технике.

Главное мы уже обсудили в главе об извлечении квадратного корня: как найти сторону прямоугольного треугольника, если даны две другие.

Следует различать два случая:

1 случай: Даны катеты, ищется гипотенуза:

$c =$

2 случай: Даны гипотенуза и катет, ищется другой катет:

$a^2=c^2-b^2$, то есть

$a=$, или

$b^2=$

На первых этапах при решении примеров желательно рисовать треугольники в масштабе, как это делалось в начале предыдущей главы, и сравнивать результат с измерением. Если они совпадают, в учениках рождается фундаментальное переживание познания — чувственное восприятие и познание находят друг друга.

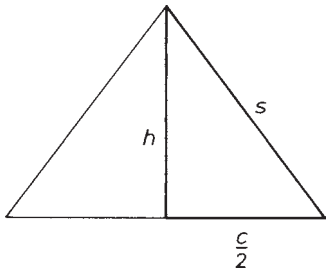
Прорешаем в этой главе ряд простых задач на применение теоремы Пифагора.

Задача 1: Даны основание *c* и боковая сторона *s* равнобедренного треугольника. Найти площадь (рис. 11.1).

Чтобы вычислить площадь, нужно найти высоту. Она делит треугольник на два конгруэнтных прямоугольных треугольника. К одному из них применим теорему Пифагора:

$h =$

Рис. 11.1



Пример: c=54 мм, s=45 мм.

Квадраты вычисляются письменным умножением или через биноминальные формулы:

$$s^2=45^2=(40+5)^2=1600+400+25=2025;$$

$$=272=(30-3)^2=900-180+9=729$$

2025
–729
1296 = h^2

h = = 36 мм
–9
39’6:6
–396
0

Формулу для площади лучше всего использовать в виде $F=\ \cdot h$, поскольку уже вычислено:

F=27 · 36
252
72
972 мм^2

Дальнейшие числовые примеры даны в задачах в конце главы.

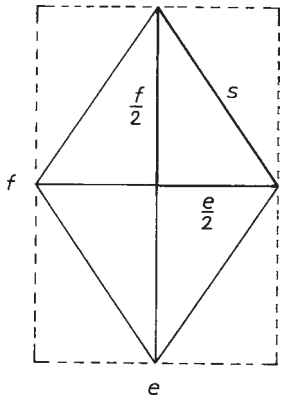


Рис. 11.2

Задача 2: Диагонали ромба равны *e* и *f*. Вычислить площадь и периметр (рис.11.2).

Впишем ромб в прямоугольник со сторонами *e* и *f*. Он в 2 раза превосходит ромб, значит, верна следующая формула для площади ромба:

$S =$

Стороны ромба вычислим по теореме Пифагора, как гипотенузы “четвертных” прямоугольников.

$s =$

Пример: e=72 мм f=154 мм

$F=$ $=36 \cdot 154$

$36 \cdot 154$
924
462
5544 мм^2

$=36^2=(30+6)^2=900+360+36=1296$

$=77^2=(80-3)^2=6400-480+9=5929$

$$\begin{array}{r} 1296 \\ +\underline{5929} \\ 7225=s^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} = 85 \text{ мм} \\ -\underline{64} \\ 82'5:16_5 \\ -\underline{825} \\ 0 \end{array}$$

$u=4 \cdot s=4 \cdot 85=340$ мм

Задача 3: Периметр ромба *u*, диагональ *e*. Найти другую диагональ — *f* и площадь (рис.11.2).

$s =$

$=$

Пример: $u=400$ мм $e=56$ мм

$=$

$28^2=(30-2)^2=900-120+4=784$

$$\begin{array}{r} 100^2=10000 \\ -\underline{784} \\ 9216 \end{array}$$

$= 96$ мм $=$

$$\begin{array}{r} -\underline{81} \\ 111'6:18_6 \\ -\underline{1116} \\ 0 \end{array}$$

$F = e \cdot \quad =$

$$\frac{480}{5376 \text{ мм}^2}$$

Задача 4: Большое основание равнобедренной трапеции равно *a*, малое — *c*, боковая сторона — *d*. Найти высоту и площадь (рис.11.3).

Опустим из обеих верхних вершин по высоте и вычислим *h* по теореме Пифагора из “бокового” треугольника:

$h =$

Пример: a=135 мм; c=25 мм; s=73 мм.

$s^2=73^2=(70+3)^2=4900+420+9=5329$

$=55^2=(50+5)^2=2500+500+25=3025$

$$\begin{array}{l} 5329 \\ \underline{-3025} \\ 2304=h^2 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \underline{-16} \\ 704:8_8 \\ \underline{704} \\ \quad 0 \end{array} \qquad = 48 \text{ мм} = h$$

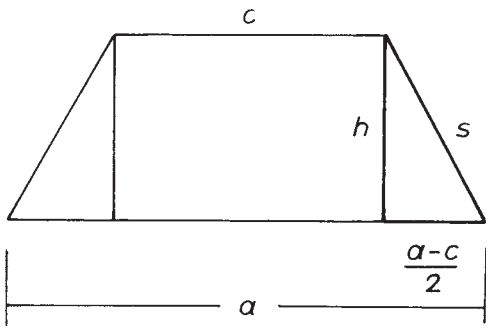


Рис. 11.3

$S =$ $=$ $= 80 \cdot 48$

3840 мм^2

Задача 5: Вычислить площадь наклонной плоскости (рис.11.4), если даны l, b и h.

$s=$ $F=l \cdot s$

Пример: l=20 см; b=15 см; h=8 см.

$s =$ $=$ $=$ $=$ 17 см;

$F=20 \cdot 17=340$ см^2.

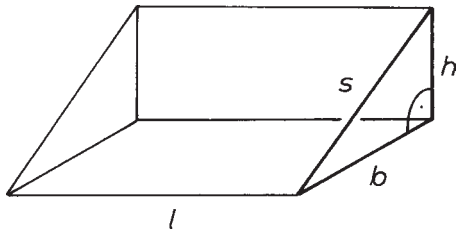


Рис. 11.4

Задача 6: Вычислить площадь боковой поверхности квадратной пирамиды со стороной основания a и высотой h (рис.11.5).

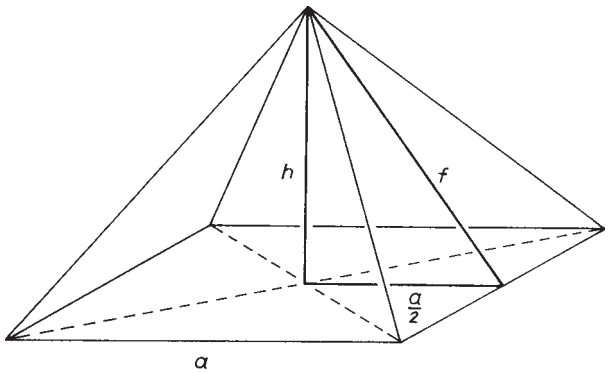


Рис. 11.5

Мы должны вычислить высоту боковой грани *f*.

$f =$

Пример: a=10 см h=12 см

$f =$ = = = 13 см.

Площадь одной из треугольных граней:

$F =$ = = 65 см^2.

Боковая поверхность: 4 · 65 см^2=260 см^2
Основание: 100 см^2
Суммарная площадь боковой поверхности: 360 см^2.

Задачи

1. Основание равнобедренного треугольника *c*, боковая сторона *d*, высота *h* и площадь *S*. Найди недостающее.

ñ	20	66	80	48	78	96	54	22
d	26	65	58	74				
h					80	64	36	60
S								

ñ						120	154	
d	85	106	73	97				
h	84	90	48	72			16	108
S						1920	2772	1008

2. Диагонали ромба *e* и *f*. Вычисли площадь и периметр (рис.11.2).

e	22	54	26	96	72	78	130	102
f	120	72	168	128	154	160	144	280

3. Периметр ромба *u*, диагональ *e*. Вычисли другую диагональ и площадь (рис. 11.2).

u	40	260	400	360	232	656	424	520
e	12	66	56	108	84	72	112	64

4. Основание равнобедренной трапеции равно *a*, малое основание — *c* и боковая сторона — *d*. Вычисли высоту и площадь (рис. 11.3).

a	84	58	36	120	90	140	135	69
c	20	10	20	30	56	28	25	45
d	68	74	17	117	145	65	73	37

5. Найди площадь наклонной плоскости по *l*, *b* и *h* (рис. 11.4).

l	30	32	45	40	55	63	84	80
b	24	21	40	35	45	55	80	77
h	7	20	9	12	28	48	39	36

6. Найди площадь боковой поверхности квадратной пирамиды по стороне основания *a* и высоте *h* (рис. 11.5).

a	16	72	120	66
h	15	27	11	56

12. Теорема о катете — теорема Евклида

Существует уточнение теоремы Пифагора — уточнение в том смысле, что квадрат гипотенузы может быть разделен на две части, каждая из которых равняется одному из квадратов катетов.

В *равнобедренном* прямоугольном треугольнике деление указать легко (рис.12.1). Поскольку оба квадрата катетов равновелики, квадрат гипотенузы можно просто разделить пополам — продолжением высоты.

Если вершина треугольника движется из высшей точки окружности Фалеса направо, то a^2 уменьшается, а b^2 увеличивается (рис.12.2). Линия деления также сдвигается вправо, и удивительным образом высота треугольника своим продолжением делит квадрат гипотенузы так, что части остаются равными квадратам катетов (рис.12.2). Это не само собой разумеется! Линия деления вполне могла бы двигаться несинхронно с вершиной *C*, медленнее или быстрее, снова совпав только в вершине *B* (рис. 12.3).

Но положение дел таково, что движение линии деления точно совпадает с движением вершины и органично вплетено в совокупную конструкцию.

Как увидеть, что оба прямоугольника, на которые высота делит квадрат гипотенузы, в точности равны квадратам катетов? Попробуем преобразовать квадраты в прямоугольники с сохранением площади на каждом шаге (для правого прямоугольника это продемонстрировано на рис.12.4—12.6).

Сперва сместим прямоугольник вверх, до параллелограмма, примыкающего к квадрату катета (рис. 12.4). Ось смещения — правая сторона квадрата гипотенузы. Затем повернем параллелограмм вокруг вершины *B* по часовой стрелке на 90° (рис. 12.5). Обе стороны, соединяющиеся в *B*,

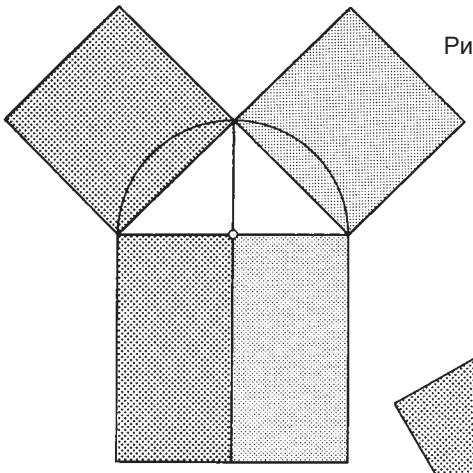


Рис. 12.1

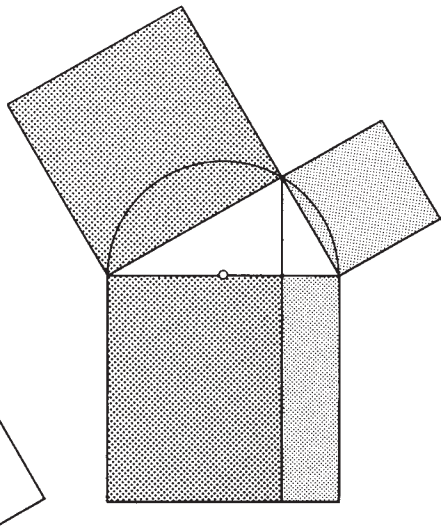


Рис. 12.2

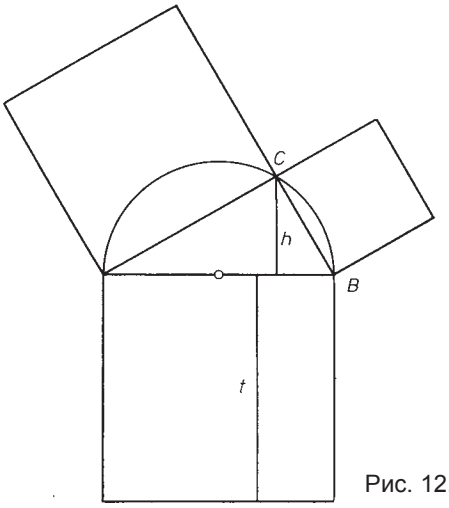


Рис. 12.3

после поворота снова оказываются сторонами квадратов гипотенузы и катета. Теперь повернутый параллелограмм сместим до квадрата катета (рис. 12.6). Ось смещения —

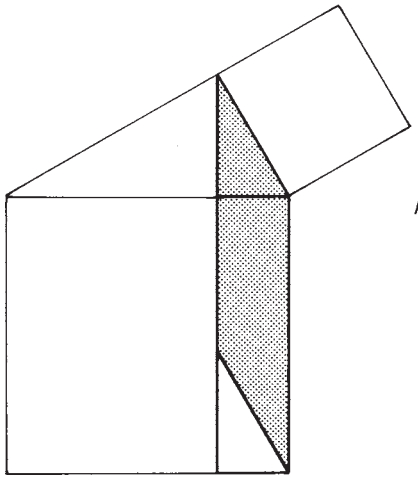


Рис. 12.4

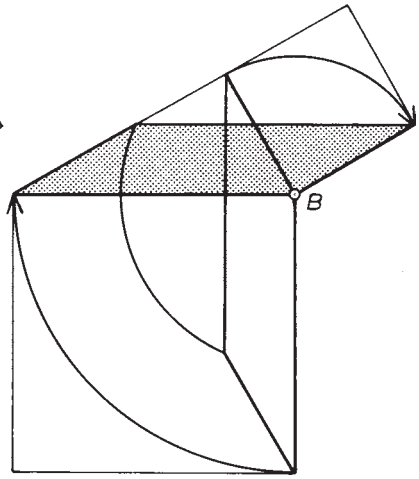


Рис. 12.5

правая нижняя сторона квадрата катета.

Поскольку при смещении и повороте площадь сохраняется, исходный прямоугольник равновелик квадрату катета. На левой стороне оба смещения и поворот проходят точно так же. Первая ось смещения совпадает с левой стороной квадрата гипотенузы.

Если представить себе фигуру в движении (верщина *C* движется по окружности Фалеса), то квадраты катетов меняют свои размеры; однако высота всегда отсекает равновеликих квадратам спутников — прямоугольники в квадрате гипотенузы. И поскольку оба прямоугольника вместе составляют квадрат гипотенузы, следовательно, последнему равна и сумма квадратов катетов.

Выражаясь более статично, удлиненная высота делит квадрат гипотенузы на два прямоугольника, равновеликих расположенным под ними квадратам катетов.

Если для обоих частей, на которые точка *H* делит гипотенузу, выбрать в качестве названия “отрезки гипотенузы”, то положение дел можно будет сформулировать следующим

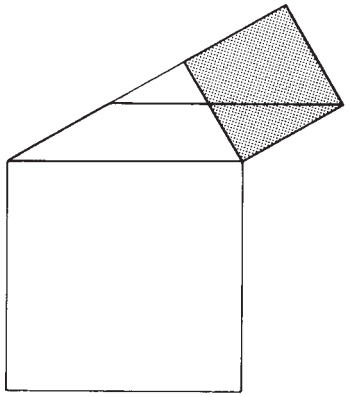


Рис. 12.6

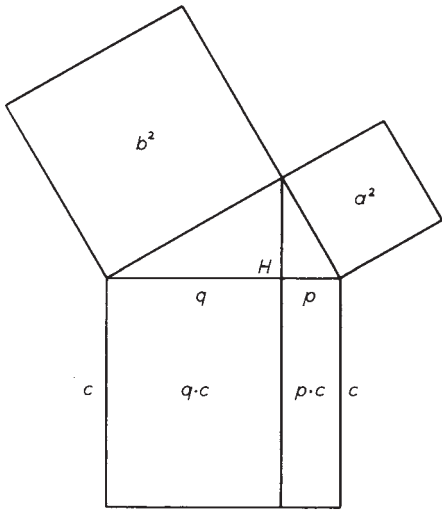


Рис. 12.7

образом: *квадрат катета равновелик прямоугольнику, построенному на гипотенузе и прилегающем отрезке гипотенузы.* (Гипотенуза — длина прямоугольника, отрезок гипотенузы — ширина.)

Принято обозначать отрезок гипотенузы, расположенный под *a*, буквой *p*, другой отрезок — *q* (рис. 12.7). Тогда теорему можно выразить в виде двух формул:

$$a^2=p \cdot c \qquad b^2=q \cdot c$$

Этот важный факт называют теоремой о катете или теоремой Евклида.

По Пифагору и Евклиду можно проследить линии исторического развития. Если о жизни Пифагора не сохранилось никаких документов и его весьма неточный портрет составлен на основе предания, рассказов учеников и последователей, то о деятельности Евклида мы знаем гораздо больше, хотя он и жил всего два столетия спустя. О Пифагоре мы даже не знаем, оставил ли он письменные труды! От Евклида до нас дошло его главное произведение, так называемые

“Элементы”, в которых он вполне последовательным, доказательным образом подытожил геометрическое учение своих предшественников. Эта работа по количеству сохранившихся списков уступает только Библии. Во Франции до начала нашего века ею пользовались в качестве учебника.

С помощью теоремы о катете можно решить задачу построения квадрата, равновеликого данному прямоугольнику (рис. 12.8–12.10). Прямоугольник рассматривается как один из двух прямоугольников в квадрате гипотенузы и соответствующим образом дополняется. Длина прямоугольника равна гипотенузе, ширина — отрезку гипотенузы, например q. Сперва длину прямоугольника поворачивают вокруг A в горизонтальное положение и получают другой конец гипотенузы B (рис. 12.8). Затем вокруг гипотенузы строят окружность Фалеса и в точке H восстанавливают перпендикуляр (рис. 12.9). Его пересечение с окружностью — вершина C прямоугольного треугольника. Квадрат, построенный на катете AC, равновелик исходному прямоугольнику (рис. 12.10).

На рис. 12.11 построен квадрат, равновеликий равностороннему треугольнику. В главе 15 мы научимся вычислять площадь равностороннего треугольника и сторону равновеликого квадрата.

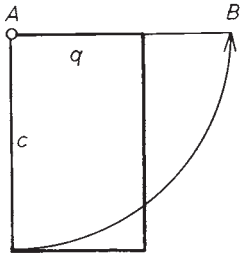


Рис. 12.8

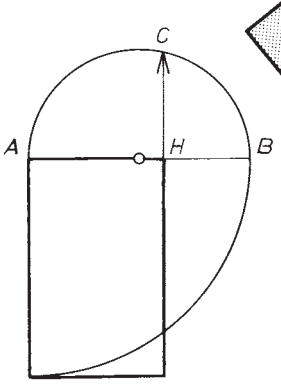


Рис. 12.9

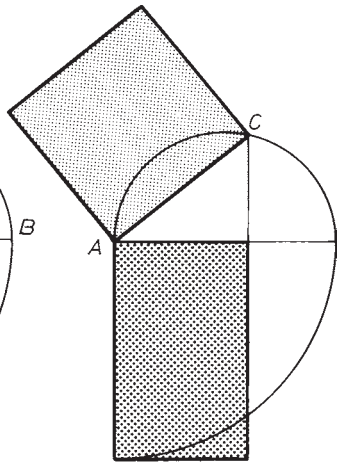


Рис. 12.10

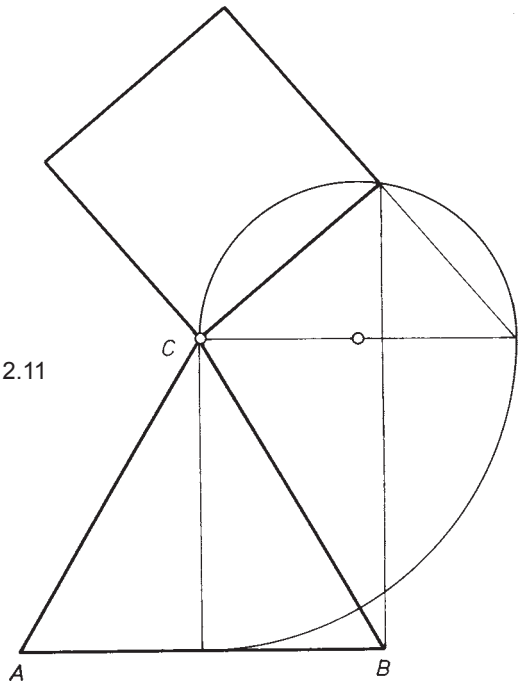


Рис. 12.11

13. Теорема о высоте

В прямоугольном треугольнике все отрезки связаны друг с другом. Поскольку катеты взаимно перпендикулярны и каждый является высотой, справедлива следующая формула для площади:

$S=$ (см. гл.3)

Конечно, верна и формула:

$S=$

Из обоих формул следует:

$2S=a \cdot b=c \cdot h$

или: $h=$

Высота интересным образом связана и с двумя отрезками гипотенузы. Оба меньших треугольника на рис.13.1 прямоугольны, так что h можно вывести с помощью теоремы Пифагора из a и p (или b и q).

$h^2=a^2-p^2$ (теорема Пифагора);

a^2 заменим на $p \cdot c$ (теорема о катете).

Итак: $h^2=p \cdot c-p^2$

p можно вынести за скобки:

$h^2=p \cdot (c-p)$.

Поскольку $c-p=q$, имеем:

$h^2=p \cdot q$.

К такому же результату приводит вычисление, проделанное для левой части:

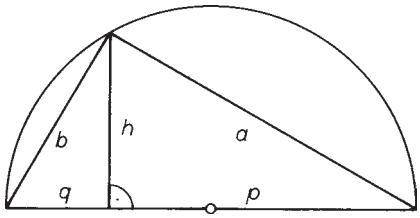


Рис. 13.1

$h^2=b^2-q^2$ (теорема Пифагора);

$b^2=q \cdot c$ (теорема о катете)

$h^2=q \cdot c-q^2$

$h^2=q \cdot (c-q)$

$h^2=q \cdot p$

Эту взаимосвязь между высотой и обоими отрезками гипотенузы называют *теоремой о высоте: квадрат высоты равновелик прямоугольнику, составленному из обоих отрезков гипотенузы.*

Нет никаких сомнений в справедливости теоремы о высоте, ведь все рассуждения проведены корректно. Однако остается чувство, что чисто вычислительный путь недостаточно проясняет нам суть. Хотелось бы “увидеть”!

Нарисуем квадрат высоты и прямоугольник, образованный из двух отрезков гипотенузы (рис.13.2). Видно ли из чертежа, что квадрат и прямоугольник равновелики? Нет, еще

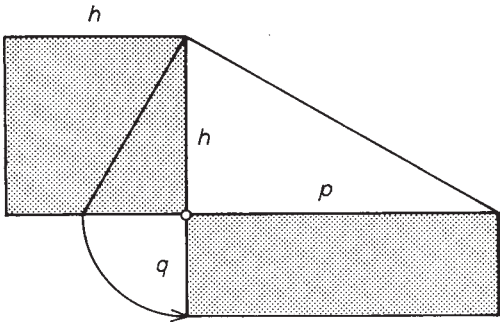


Рис. 13.2

Рис. 13.3

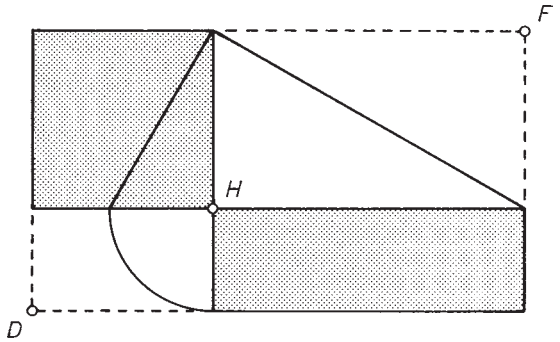
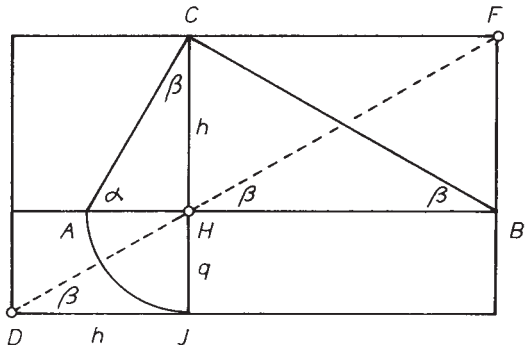


Рис. 13.4



не видно! Нужно снова дополнить чертеж, чтобы связь стала видимой.

Впишем квадрат высоты и прямоугольник в объемлющий прямоугольник (рис. 13.3). Фигура напоминает гномон. При каких условиях она становится таковой? Если точка *H* лежит на диагонали *DF,* то становится очевидным, что квадрат высоты равновелик прямоугольнику.

Соединим *H* с *D* и *F* (рис. 13.4). Кажется на первый взгляд, что оба отрезка принадлежат одной прямой. Но на одно только зрение мы полагаться не можем. Попробуем найти на чертеже геометрические основания.

И мы найдем их: рассмотрим два треугольника *HBF* и *HBC*. Они очевидным образом конгруэнтны, и это значит, что отре-

Рис. 13.5

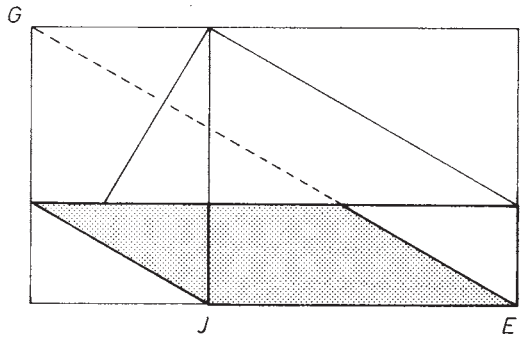
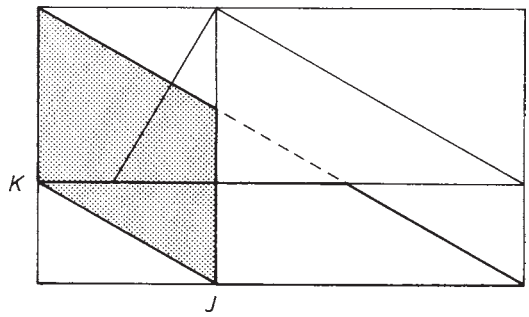


Рис. 13.6



зок *HF* имеет тот же угол подъема, что и отрезок *BC*. Далее рассмотрим треугольник *DJH*. Он прямоугольный, катеты равны *h* и *q*. Следовательно, он конгруэнтен треугольнику *HCA* и имеет с ним равные углы. Но угол при вершине *C* должен быть равен β, поскольку вместе с углом α он составляет 90°. Итак, угол при *D* тоже равен β. Но если оба отрезка – *DH* и *HF* поднимаются под одним и тем же углом, они должны лежать на одной и той же прямой, на диагонали *DF*. Итак, *H* действительно лежит на диагонали, а фигура — настоящий гномон. Следовательно, квадрат высоты и прямоугольник равновелики. Мы испытываем глубокое удовлетворение — и вместе с ним уверенность — в истинности теоремы о высоте.

Попробуем смещением преобразовать прямоугольник в

квадрат. Снова потребуются три шага: вначале смещение влево вдоль оси *JE* (рис.13.5). Поскольку обе “боковые” стороны поднимаются влево под одинаковым углом, продолжение правой проходит через *G* (ведь диагонали в большом прямоугольнике образуют с горизонталями угол β). Второе смещение с осью *JK* влево вверх (рис.13.6). Третье — с осью *KG* в квадрат высоты (рис.13.7).

Теорема о высоте позволяет решить задачу построения для данного прямоугольника равновеликого квадрата (рис. 13.8, 13.9). Существенную роль в решении снова играет окружность Фалеса. Стороны прямоугольника выступают в виде отрезков гипотенузы.

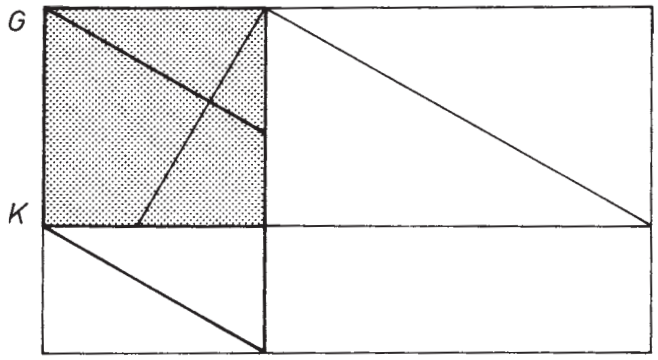


Рис. 13.7

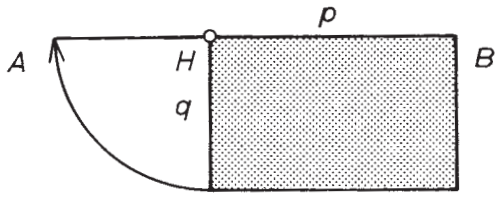


Рис. 13.8

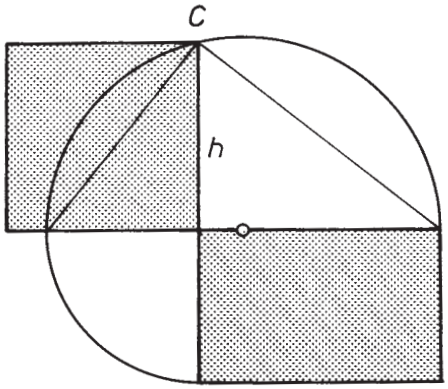


Рис. 13.9

14. Как связаны друг с другом все отрезки в прямоугольном треугольнике

Только дополнив теорему Пифагора теоремами о катете и о высоте, можно увидеть, каким образом связаны все отрезки прямоугольного треугольника. Проиллюстрируем эти взаимосвязи на конкретных примерах. Рассмотрим в качестве примера наиболее известный из прямоугольных треугольников — египетский, с отношением сторон 3 : 4 : 5, и вычислим отрезки гипотенузы и высоту.

Пример 1: a=30 мм b=40 мм c=50 мм (рис.14.1)
Отрезки гипотенузы вычислим из теоремы о катете:

$p \cdot c = a^2 \rightarrow p =$ $=$ $\frac{\text{мм}^2}{\text{мм}}$=18 мм;

$q \cdot c = b^2 \rightarrow q =$ $=$ $\frac{\text{мм}^2}{\text{мм}}$=32 мм;

Проверка: $p+q$=18 мм+32 мм=50 мм=c.
Высоту h можно вычислить четырьмя способами:
1. Исходя из площади:

$h =$ $=$ $=$ =24 мм.

2. Исходя из теоремы о высоте:

$h =$ $=$ $=$ =24 мм.

3. Исходя из теоремы Пифагора для правого треугольника:

$h =$ $=$ $=$ =24 мм.

Рис. 14.1

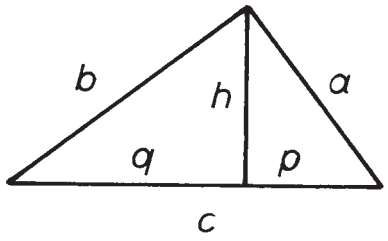
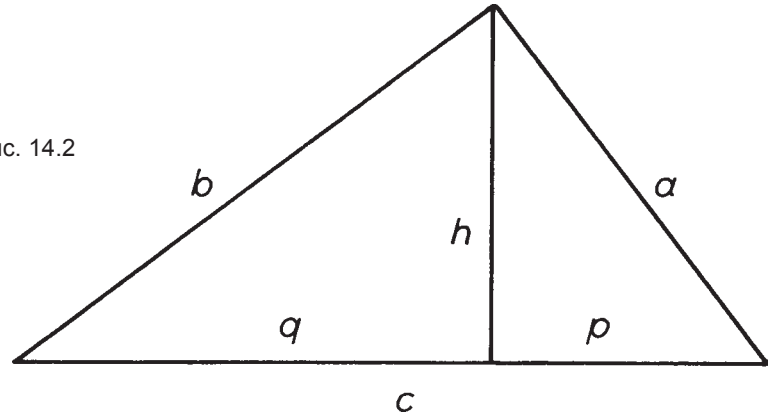


Рис. 14.2



4. Исходя из теоремы Пифагора для левого треугольника:

h= = = =24 мм.

Все четыре способа дают одну и ту же высоту! Таким образом переплетены друг с другом отрезки в прямоугольном треугольнике!

Пример 2: *a*=6 мм *b*=8 мм *c*=10 мм (рис. 14.2)

Единицы измерения будем проставлять только в окончательных результатах:

1. *p*= = =3,6 мм

2. *q*= = =6,4 мм

Проверка: *p*+*q*=3,6+6,4=10 мм=*c*

3. $h=$ $=$ $=$ $=4{,}8$ мм

4. $h=$ $=$ $=$ $=4{,}8$ мм

5. $h=$ $=$ $=$ $=$ $=4{,}8$ мм

6. $h=$ $=$ $=$ $=$ $=4{,}8$ мм

Пример 3: $a=5$ см $b=12$ см $c=13$ см (индийский треугольник)

Будем вычислять, используя обычные дроби.

1. $p=$ $=$ $=1\,{}^{12}/_{13}$ см

2. $q=$ $=$ $=11\,{}^{1}/_{13}$ см

Проверка: $p+q=1\,{}^{12}/_{13}+11\,{}^{1}/_{13}=13$ см$=c$

3. $h=$ $=5\cdot$ $=$ $=4\,{}^{8}/_{13}$ см

4. $h=$ $=$ $=$ $=$ $=4\,{}^{8}/_{13}$ см

5. $h=$ $=$ $=$ $=$

$=$ $=$

$=$ $=$ $=4\,{}^{8}/_{13}$ см.

Последнее вычисление на первый взгляд выглядит очень

сложно. Кто повторно продумает его ход, может научиться на этом примере свободному обращению с дробными и полными квадратами. Существенные шаги: преобразовать 25 в дробь со знаменателем 169 и вынести в числителе 25 за скобки. Тогда нет нужды вычислять произведения 25 · 25 и 25 · 169.

6. $h=$ $=$ $=$ $=$

$=$ $=$

$=$ $= 4\,{}^{8}/_{13}$ см.

Естественно, пятое и шестое вычисления можно опустить.

Пример 4: a=5 см b=12 см c=13 см

1. $p=$ $=$ $=3\,{}^{13}/_{17}$ см

2. $q=$ $=$ $=13\,{}^{4}/_{17}$ см

Проверка: $p+q=3\,{}^{13}/_{17}+13\,{}^{4}/_{17}=17$ см$=c$

3. $h=$ $=$ $=$ $=7\,{}^{1}/_{17}$ см

4. $h=$ $=$ $=$ $=$ $=$ $=7\,{}^{1}/_{17}$ см

Взаимосвязь теоремы о высоте, теоремы о катете и формулы площади можно выразить и в общем виде:

$$= \qquad = \qquad = \qquad = h$$

Уже на этих немногих примерах мы можем почувствовать, как органично связаны друг с другом все отрезки прямоугольного треугольника.

15. Неизвлекающиеся корни. Экскурс в область иррациональных чисел

Важные задачи на теорему Пифагора приводят к неизвлекающимся корням. На них натыкаешься, если нужно вычислить, скажем, гипотенузу *равнобедренного* прямоугольного треугольника.

Пусть боковая сторона такого треугольника равна 4 см. Чему равна гипотенуза (рис. 15.1)? Мы знаем, что квадрат гипотенузы равен дважды 16 см^2, или 32 см^2. Итак, гипотенуза *c* равна :

=5,656…
–25
70’0:10$_6$
–636
640’0:112$_5$
–5625
7750’0:1130$_6$
–67836
9664

Остатки и делители становятся все больше и больше; и труднее, — чем же все кончится?! Без сомнения, корень не извлечен до конца. Но? Можно ли вообще прийти к концу, или так и придется довольствоваться промежуточным результатом? Обратимся к полученному числу. Мы ищем число, которое, будучи возведено в квадрат, дает 32. Возведем в квадрат 5,656:

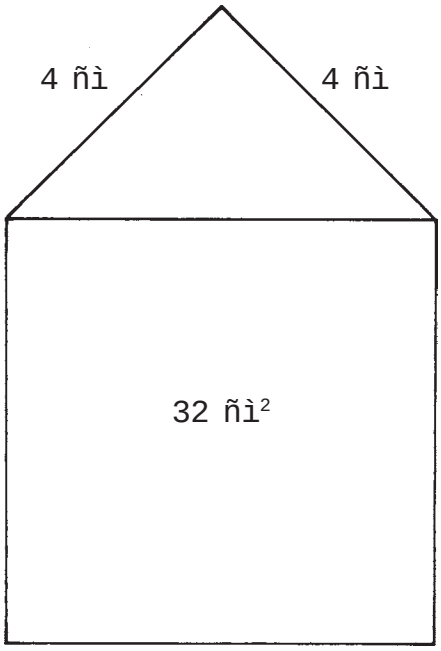


Рис. 15.1

$$
\begin{array}{r}
5{,}656 \cdot 5{,}656 \\
\hline
33936 \\
28280 \\
33936 \\
28280 \\
\hline
31{,}990336
\end{array}
$$

Ровно 32 не выходит, получается чуть меньше, но почти 32. Посмотрим, сколько не хватает до 32:

$$
\begin{array}{r}
32{,}000000 \\
-31{,}990336 \\
\hline
0{,}009664
\end{array}
$$

В точности эти цифры (9664) появляются как последний остаток при извлечении корня! Более того, даже запятая стоит

на нужном (третьем) месте. Если прибавить остаток к $5{,}656^2$, получится 32:

$$
\begin{array}{r}
5{,}656^2=31{,}990336 \\
+0{,}009664 \\
\hline
32{,}000000
\end{array}
$$

Таким образом, вычисление пришло все же к известному завершению и не повисло в неопределенности.

Нельзя ли рассматривать прибавление остатка как своего рода проверку на правильность извлечения корня, и нельзя ли проделывать такую проверку после некоторого количества шагов алгоритма?

Прибавление остатка после получения первого знака после запятой:

$$
\begin{array}{l}
\quad =5{,}6 \\
-\underline{25} \\
\quad 70'0:10_6 \\
-\underline{636} \\
\quad 64
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\underline{5{,}6 \cdot 5{,}6} \\
336 \\
\underline{280} \\
31{,}36 \\
+\ 0{,}64 \\
\hline
32{,}00
\end{array}
$$

Прибавление остатка после получения второго знака после запятой:

$$
\begin{array}{l}
\quad =5{,}656\ldots \\
-\underline{25} \\
\quad 70'0:10_6 \\
-\underline{636} \\
\quad 640'0:112_5 \\
-\underline{5625} \\
\quad 775
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
\underline{5{,}65 \cdot 5{,}65} \\
2825 \\
3390 \\
\underline{2825} \\
31{,}9225 \\
\underline{+0{,}0775} \\
32{,}0000
\end{array}
$$

Выходит, справедливо наше наблюдение, что последний остаток, прибавленный к квадрату результата, с точностью дает подкоренное выражение? Бесполезно приводить конкретные примеры, необходимо найти аргументы общего поряд-

ка. Рассмотрим еще раз рис.15.1: площадь квадрата гипотенузы 32 см^2. Впишем в квадрат гипотенузы квадрат со стороной 5 см (рис. 15.2). Он не до конца заполнит исходный квадрат: внизу и справа останутся полоски, которые вместе составят “уголок”. Площадь уголка 7 см^2. Нам надо узнать ширину уголка. Чтобы решить эту задачу, перейдем к мм^2. Уголок состоит из двух прямоугольников длиной 50 мм и квадратика. Делим 700 мм^2 на 100 мм. Получаем оценку для ширины прямоугольника. Нужно, правда, учесть квадратик. Ширина должна быть заключена между 6 и 7 мм. Не 7 мм — в противном случае прямоугольники составили бы 700 мм^2 и без всякого квадратика.

Впишем в рисунок уголок со стороной 6 мм (рис. 15.3). Его площадь 636 мм^2. Он тоже не вполне покрывает квадрат гипотенузы; остается новый — совсем маленький — уголок, площадь которого 64 мм^2, а ширина, безусловно, меньше 1 мм.

Сравним наши рассуждения с процедурой извлечения корня:

$$
\begin{array}{l}
\quad\;\; =5{,}656\ldots \\
-\underline{25} \\
\quad\;\; 70'0:10_6 \\
\;\; -\underline{636} \\
\quad\;\; 64
\end{array}
$$

Все то же самое! Вначале остаток 7 см^2. Прибавление двух нулей означает не что иное, как переход к мм^2. Теперь этот остаток мы должны бы разделить на 100 мм — но арифметически сподручнее 70 делить на 10. Число 636 — не что иное, как площадь уголка со стороной 6 мм. 64 мм^2 составляет площадь второго, более узкого уголка. Вычисляя 5,6^2, мы вычисляем площадь увеличенного квадрата. Если мы прибавляем площадь второго угла, то в итоге должно получиться 32 см^2. Хотя рассуждения основаны на совершенно конкретном примере, сразу бросается

Рис. 15.2

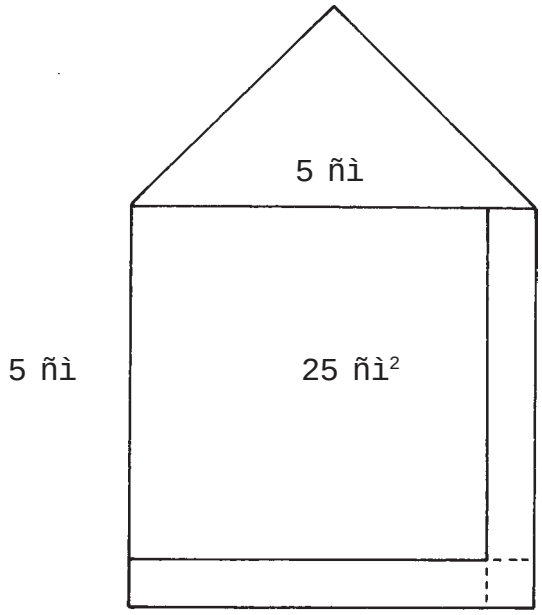
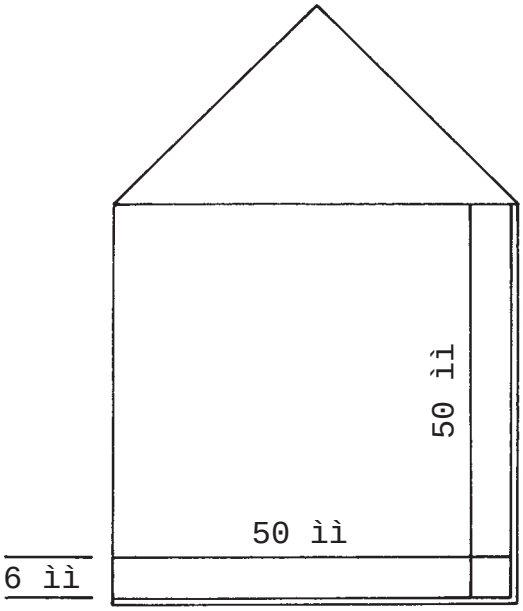


Рис. 15.3



в глаза то, что они имеют общий характер. И то, что их можно повторить: 64 мм^2 нужно теперь превратить в 6400 дмм^2 (децимиллиметр — десятая часть миллиметра), взять внутренний уголок 1120 дмм и так далее. Для вычислительного процесса извлечения квадратного корня найдена геометрическая интерпретация. И она убеждает нас, что если последний остаток прибавить к квадрату результата, то всегда получится подкоренное выражение.

Итак, если даже мы прерываем процесс извлечения корня, мы всегда можем убедиться в правильности прибавлением остатка. Это вселяет чувство уверенности, здоровое доверие к себе. Для школьников благо — как можно чаще переживать это чувство.

Другие примеры вычисления гипотенузы c по боковой стороне s равнобедренного прямоугольного треугольника:

1. s=3 см $c^2=2s^2=18$ см^2

```
     =4,24                    4,24 · 4,24
–16                                1696
  20'0:8₂                          848
–164                             1696
   360'0:84₄                     17,9776
  –3376                          +0,0224
    224                          18,0000
```

2. s=5 см $c^2=2s^2=50$ см^2

```
     =7,07                    7,07 · 7,07
–49                                4949
  10'0:14₀                       49490
      0                          49,9849
  1000'0:140₇                    +0,0151
  –9849                          50,0000
    151
```

3. s=6 см $c^2=2s^2=72$ см^2

=8,48	8,48 · 8,48
–64	6784
80’0:16$_4$	3392
–656	6784
1440’0:168$_8$	71,9104
–13504	+0,0896
896	72,0000

С помощью остатка мы, как видно, можем убедиться в правильности вычислений. Но как эти вычисления пойдут дальше, мы все же еще не знаем.

В заключение мы рассмотрим процесс извлечения корня для одного особого случая; все приведенные примеры на самом деле являются частными случаями одного специального вида. Каким бы ни было *s*, всегда:

$c^2=2s^2$

$c=$ =

Если мы знаем , мы можем узнать и *c* простым умножением на *s*. У вычислим три цифры после запятой:

=1,414	1,414 · 1,414
–1	5656
10’0:2$_4$	1414
–96	5656
40’0:28$_1$	1414
281	1,999396
1190’0:282$_4$	+604
–11296	2,000000
604	

Для *s*=3~~, 4, 5, 6~~ см мы уже вычислили:

s=3 см *c*= = 4,24 см
s=4 см *c*= = 5,656 см
s=5 см *c*= = 7,07 см
s=6 см *c*= = 8,48 см

Посчитаем теперь по формуле *c*=

При точности до двух знаков после запятой результаты те же. (Об округлении мы еще поговорим.)

Но как дальше будет продвигаться извлечение ? Прекратится ли оно однажды, то есть дойдем ли мы до нулевого остатка? Ответ гласит: “Нет, вычисления никогда не остановятся; никогда мы не дойдем до нулевого остатка. Десятичная дробь будет иметь бесконечно много знаков после запятой, причем без периода, то есть без повторяющихся цифровых групп. И это относится ко всем неизвлекающимся корням!” Но почему? Это “Почему” ученики уже в 8-м классе ощущают как глубокий внутренний вопрос; но вполне обоснованный ответ возможен только на более высокой ступени понимания. Классный учитель с полным правом может апеллировать к будущим урокам в старшей школе. Хотя, вероятно, и для классного учителя будут небезынтересны те размышления, которые приводят к ответу на поставленный нами вопрос. К ним мы обратимся в Приложении.

Итак, вычисление неизвлекающегося корня мы, к счастью или к сожалению, должны в какой-то момент прервать. При решении практических задач в геометрии и технике встает вопрос: какой точности нужен результат? И в зависимости от требуемой точности вычисляются один, два, три или больше знаков после запятой. Впрочем, больше требуется не часто. Если результат должен быть известен с точностью до *одной* цифры после запятой, то вычисляются *две* цифры и затем результат округляется.

Пример 1: =4,69

–16

60’0:8$_6$

–516
840’0:92$_9$
8361
39

Вторая цифра после запятой – 9; значит, первая цифра увеличивается с 6 до 7: =4,7. Ни 4,6, ни 4,7 не равны ; первое значение слишком мало, второе — слишком велико. Возведем их в квадрат:

4,6 · 4,6	4,7 · 4,7
276	329
184	188
21,16	22,09

4,7^2 незначительнее отличается от 22. Хотя результат и неточен, по крайней мере максимально уменьшено возможное расхождение.

Пример 2: =4,47$_2$

–16
40’0:8$_4$
–336
640’0:88$_7$
–6209
1910’0:894$_2$
–17884
1216

Третья цифра после запятой — 2. Просто отбросим ее: =4,47. И мы знаем, что 4,47 точнее, чем 4,48.

Равнобедренный прямоугольный треугольник привел нас к . Гипотенуза в раз больше боковой стороны (рис.15.4). И наоборот: *s*= (рис.15.5). Или *s*= (рис. 15.6).

Высота делит треугольник на два меньших, в свою очередь прямоугольных и равнобедренных, с боковой стороной и гипотенузой *s*. Итак, для *s* верны две формулы. Их рав-

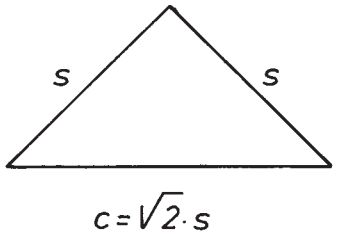


Рис. 15.4

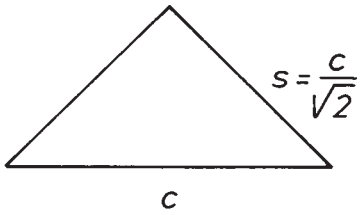


Рис. 15.5

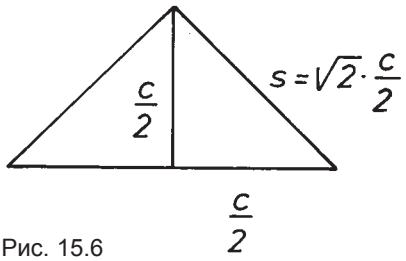


Рис. 15.6

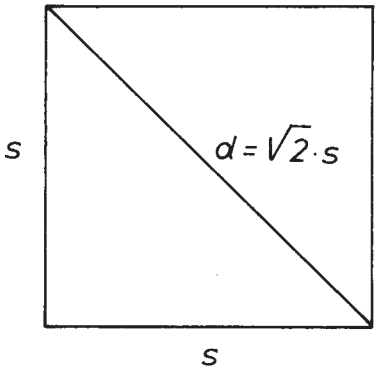


Рис. 15.7

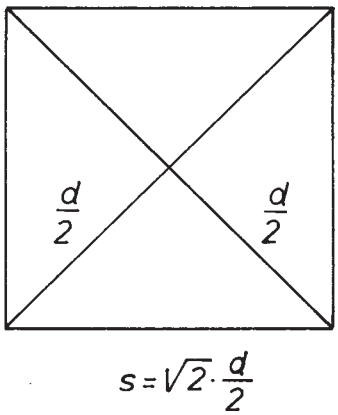


Рис. 15.8

нозначность видна и чисто вычислительно:

$s=$ $=$ $=$ $=$.

Те же самые формулы справедливы для стороны и диагонали квадрата, поскольку диагональ делит квадрат на два равнобедренных прямоугольных треугольника (рис.15.7 и 15.8).

$d=$ $s=$ $=$.

Равносторонний треугольник приводит нас к другому неизвлекающемуся корню. Нужно, зная его сторону, вычислить высоту и площадь (рис. 15.9).

$h^2=$

$h^2=$

$h^2=$

$h=$

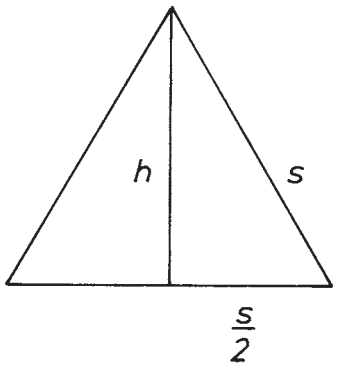


Рис. 15.9

h=

По каким правилам мы переходили от строки к строке?

1.

2. (рис.15.10)

3. ?

Под корнем можно умножать и делить; из каждого сомножителя и из каждого участника деления можно извлекать корень по отдельности.

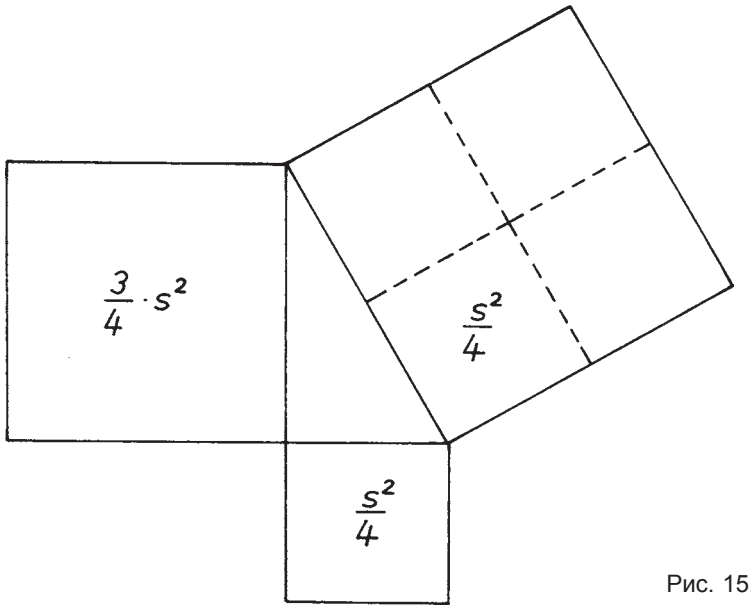


Рис. 15.10

$h=$

Площадь равностороннего треугольника ищется по формуле:

Итак, высота и площадь равностороннего треугольника стоят под знаком числа .

$=1{,}732_0$

-1

$20'0:2_7$

-189

$110'0:34_3$

-1029

$710'0:346_2$

-6924

$1760'0:3464_0$

-0

17600

Поскольку четвертая цифра после запятой — 0, = 1,732 с очень хорошей точностью.

Формулы для решения равностороннего и равнобедренного прямоугольного треугольников играют важнейшую роль в геометрии; они используются повсеместно. Например, в тригонометрии. Они создают важный фундамент для работы в старших классах.

Задачи

1. Вычисли с точностью до одного знака после запятой

(значит, вычислять придется две цифры после запятой, а затем округлять) диагональ прямоугольника со сторонами *l* см и *b* см. Результат проверяй построением:

l	5	6	7	9
b	3	5	4	5

2. Вычисли ширину прямоугольника с длиной *l* см и диагональю *d* см с точностью до одной цифры после запятой:

l	5	6	7	9
d	6	8	9	10

3. Длина лестницы 3,4 м. Если ее верхняя точка с точностью касается верхнего края стены, нижняя точка отстоит от этой стены на 1,2 м. Найди высоту стены.

4. Найди прямоугольные треугольники с целочисленными катетами, гипотенузы которых соответственно равны *c* со значениями:

c=

Построй один из треугольников и проверь, совпадает ли результат извлечения корня со значением на чертеже.

5. Ищется прямоугольный треугольник с целочисленной гипотенузой *c* и целочисленным катетом *a*, второй катет которого равен *b* и принимает соответственно значения:

b=

6. Вычисли диагональ квадрата со стороной *s* см. = 1,414; точность — два знака после запятой.

s	10	12	15	2,5	3,2	4,1

Проверь один из результатов, используя точное построение.

7. Чему равна сторона квадрата с диагональю *d*?

d	4	10	12	5	9	4,8	6,6

8. Вычисли высоту и площадь равностороннего треугольника со стороной *s* см. = 1,732; точность — два знака после запятой.

s	4	6	10	2,4	3,6	5,8

9. Найди площадь правильного шестиугольника, вписанного в окружность с радиусом 6 см? Чему равна разница площадей шестиугольника и круга? Площадь круга $F=\pi r^2$; $\pi=3,14$.

10. Построй вписанную и описанную окружность квадрата (например, со стороной *s*=6 см). Найди отношение площадей.

11. В главе о гомотетии мы вписывали квадрат в полукруг. Построй вписанный квадрат для полукруга с радиусом r = 4 см и вычисли сторону квадрата с точностью до двух знаков. *Указание*: Обозначь сторону квадрата *x*. Найди на рисунке прямоугольный треугольник и вычисли сторону по теореме Пифагора.

12. Построй треугольник со сторонами *c*=6 см, *a*=5 см, *b*=4 см. Выбери центр гомотетии (произвольным образом) и увеличь треугольник так, чтобы площадь удвоилась. *Указание*: Если площади относятся как 1 : 2, то отрезки относятся как . А мы знаем отрезки, находящиеся друг к другу в таком отношении!

Приложение к вопросу: Бесконечно ли вычисление ?

Чисто умозрительно одна возможность: процесс в какой-то момент останавливается. Другая возможность — хотя вычисления и продолжаются до бесконечности, но при этом повторяется некая группа цифр. То есть десятичная дробь оказывается *периодической*, что нам уже хорошо знакомо. Третья возможность: десятичная дробь бесконечна и непериодична.

Первая и вторая возможности означают: представима в виде , поскольку такое представление (в виде обыкновенной дроби) существует для всякой как конечной, так и бесконечной периодической десятичной дроби.

Примеры такого представления для конечных десятичных дробей нам хорошо известны:

0,25= 0,375= ; 0,4136= = .

Как найти обыкновенную дробь, соответствующую бесконечной периодической дроби?

Пример 1: Какая обыкновенная дробь равна бесонечной десятичной дроби 1,343434..? Увеличим дробь в сто раз и отнимем от результата первоначальное число:

134,343434...
–1,343434...
133,000000...

“Бесконечность” после запятой исчезла; осталось целое число ~~133. Оно равн~~о 99-кратному исходному числу.

99 · 1,343434...=133

1,343434...=

Так можно в принципе поступать со всякой периодической дробью. Если период охватывает только один порядок (одну цифру) — рассматривают удесятиренное число; если

две цифры — число увеличивается в 100 раз; три цифры — в 1000 раз и так далее. Далее отнимается первоначальное значение.

В следующих примерах десятичная дробь обозначается буквой *z*.

Пример 2:

z=4,666...
10z=46,666...
z=4,666... —
9z=42,000...

z= = =4 $^{2}/_{3}$

Пример 3:

z=1,216 216 216...
1000z=1216,216 216...
z=1,216 216... —
999z=1215,000000...

z= = =1 $^{24}/_{111}$

Пример 4:

z=1,254 54 54...
100z=125,454 54...
z=1,254 54... —
99z=124,200 00...

z= = = = =1 $^{14}/_{55}$

С помощью деления можно произвести проверку результата. Скажем, последний пример:

69:55=1,254
–55
140

–110
300
–275
250
–220
30

Остаток 30 появляется дважды. Итак, в результате повторяются цифры 5 и 4, а в процессе вычислений — остатки 25 и 30.

Вопрос, подпадает ли процесс вычисления под первый или второй случай, тождествен вопросу, можно ли представить в виде дроби ? Эта дробь, если она существует, должна обладать свойством:

$$p^2 = 2q^2$$

Мы должны, таким образом, найти квадрат (q^2), удвоение которого ($2q^2$) дает снова квадрат (p^2).

Вопрос этот тождествен вопросу о существовании равнобедренного прямоугольного треугольника с целочисленной боковой стороной s и целочисленной гипотенузой c? Для них также выполняется соотношение: $c^2=2s^2$. Роль p играет c, роль q — s.

Систематично рассмотрим все значения целочисленных боковых сторон и удвоение их квадратов. Может быть, среди удвоенных значений появится полный квадрат?

s	s^2	$2s^2$	s	s^2	$2s^2$
1	1	2	11	121	242

2	4	8	12	144	288
3	9	18	13	169	338
4	16	32	14	196	392
5	25	50	15	225	450
6	36	72	16	256	512
7	49	98	17	289	578
8	64	128	18	324	648
9	81	162	19	361	722
10	100	200	20	400	800
			...	...	...

Напрасно мы будем искать в третьей колонке полные квадраты; их там нет! Правда, встречаются числа, которые отличаются от полного квадрата только на 1 — в меньшую или большую сторону. Соберем эти числа:

s	s^2	$2s^2$
1	1	$2 = 1^2+1$
2	4	$8 = 3^2-1$
5	25	$50 = 7^2+1$
12	144	$288 = 17^2-1$

Есть еще такие числа? Да, первая колонка растет закономерно: 5 — это удвоенное 2 и 1. 12 — это удвоенное 5 и 2. Удвоим последнее число и прибавим предпоследнее: $2 \cdot 12+5=29$. Подходит?

s	s^2	$2s^2$
29	841	$1682 = 41^2+1$

Следующая возможность: $2 \cdot 29+12=70$.

70	4900	$9800 = 99^2-1$

Такой алгоритм дает все новые значения для s, удвоенные квадраты которых отличаются от полного квадрата только на 1.

С помощью этих особых чисел мы найдем дроби, квадрат

которых чем дальше, тем меньше, отличается от 2:

Дроби сами приближаются к $\sqrt{2}$, но не достигают его!

=1,4 =1,413...

=1,416... =1,41428...

Подчеркнутые цифры верны.

Но почему бы $2s^2$ когда-нибудь не стать точным полным квадратом? Ведь наша таблица просмотрена только в ничтожной ее части! Ответ на этот вопрос мы отыщем, рассмотрев разложение полных квадратов *на простые сомножители*:

$2^2 = 2 \cdot 2$	$8^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
$3^2 = 3 \cdot 3$	$9^2 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$
$4^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$10^2 = 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5$
$5^2 = 5 \cdot 5$	$11^2 = 11 \cdot 11$
$6^2 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3$	$12^2 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$
$7^2 = 7 \cdot 7$	...

Для такого разложения на простые сомножители характерно, что каждый сомножитель входит в разложение *четное* число раз. И это верно для всех полных квадратов: предста-

вим только, что основание уже разложено на простые сомножители. Тогда в квадрате каждый множитель будет встречаться ровно в 2 раза чаще, чем в основании, то есть *четное* число раз.

Представим себе разложение на простые сомножители числа $2s^2$. *2* может входить, а может и не входить в разложение основания. Во втором случае в разложении $2s^2$ будет только одна двойка. Если же имеет место первый случай, то *2* входит в разложение s^2 четное число раз. Вместе с первой двойкой в разложении $2s^2$ оказывается *нечетное* число двоек. В обоих случаях количество *двоек нечетно*. Значит, $2s^2$ никогда не может быть полным квадратом.

То есть не существует дроби , квадрат которой равнялся бы 2. Познание этого факта брезжило перед греческими математиками еще в третьем тысячелетии до нашей эры. Они никак не могли поверить, что бывают такие числа, которые непредставимы в виде отношения двух целых. Мы не можем себе представить, насколько велико было потрясение, даже ужас, когда было точно установлено, что не является дробью. Это было нечто немыслимое. На самом деле на примере неизвлекаемых корней мы соприкасаемся с такой числовой сферой, которая недоступна для отдельных обыкновенных дробей. Как бы много знаков после запятой мы ни отыскали, все равно это будет только приближением к . Хотя на этом пути мы можем приблизиться к истинному значению сколь угодно близко; алгоритм извлечения корня — в этом смысле *путь*, ступени которого все ближе и ближе подводят нас к *цели* . К той же цели ведет нас и другой путь:

Ни на одной ступени самой по себе мы не получим . К цели приводит, цель определяет весь путь, а не отдельные шаги.

Числа такого рода называют *иррациональными*; каждый шаг на пути к ним — число *рациональное* (дробь).

16. Заключительные замечания к теореме Пифагора

На сторонах прямоугольного треугольника можно построить самые разнообразные фигуры, необязательно квадраты. Например, равносторонние треугольники (рис. 16.1). Как относятся друг к другу их площади? Является ли сумма треугольников катетов треугольником гипотенузы? Назовем их F_a, F_b, F_c и вычислим площади. В главе о неизвлекающихся корнях мы познакомились с формулой площади равностороннего треугольника:

;

Итак:

F_a= F_b= F_c= ;

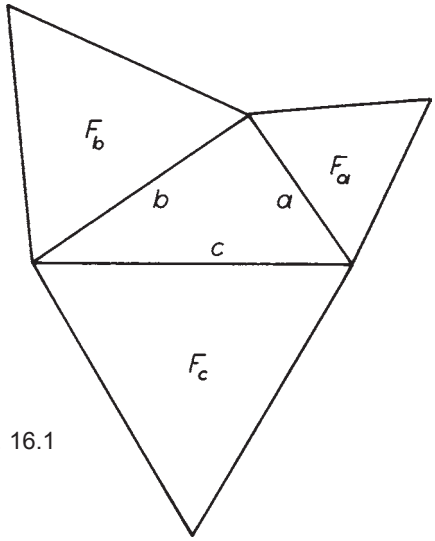


Рис. 16.1

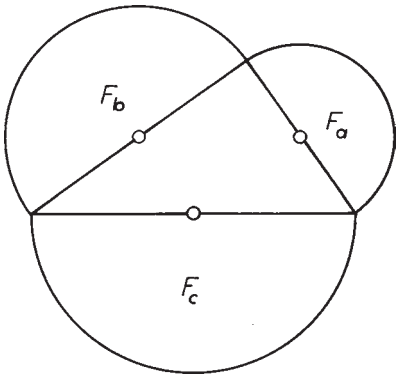


Рис. 16.2

Сложим F_a и F_b:

$F_a+F_b=$ $= F_c$.

Сомножитель можно вынести за скобки. В скобках возникает левая часть теоремы Пифагора, поэтому в итоге возникает c^2. Таким образом, теорема Пифагора буквально распространяется на равносторонние треугольники.

На сторонах треугольника как на диаметрах можно построить окружности (рис. 16.2). Площадь круга ищется по формуле:

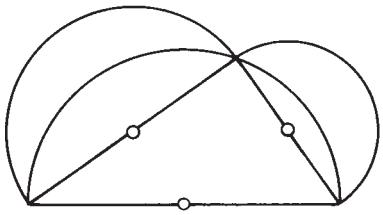
$F=\pi r^2$

$F_a=$

$F_b=$

$F_c=$

Рис. 16.3



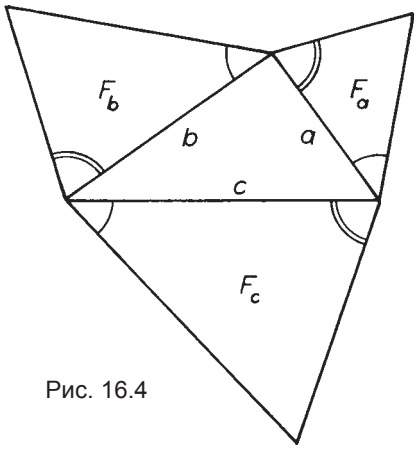


Рис. 16.4

Мы тотчас видим, что и в этом случае сумма F_a и F_b дает F_c:

$$F_a+F_b = \qquad\qquad\qquad\qquad =F_c\ .$$

Если полуокружность, построенную на гипотенузе, рисовать вверх (рис.16.3), а не вниз, то между полукругами возникают серповидные фигуры (“луны Гиппократа”). Интереснейшая задача — посчитать сумму их площадей. Результат повергает в изумление!

Не распространяется ли теорема Пифагора на вообще все фигуры? На все, конечно, нет. В обоих рассмотренных примерах треугольники были подобны, подобными были и полуокружности — форма фигур была одной и той же. Одинаковая форма, подобие — может быть, это и является необходимым условием для справедливости теоремы Пифагора?

Построим на сторонах треугольника *произвольные подобные* треугольники: достаточно, чтобы углы их были равны (рис. 16.4). Стороны маленького треугольника относятся к сторонам большого как . Стороны среднего относятся к сто-

ронам большего как . Как относятся друг к другу площади? Как квадраты сторон! Итак:

и

Отсюда:

$F_a =$ и $F_b =$

Сложим F_a и F_b:

Обе дроби в скобках имеют одинаковые знаменатели; числители можно просто сложить. Сумма площадей фигур, построенных на катетах, равна, таким образом, площади фигуры, построенной на гипотенузе.

Поскольку приведенное рассуждение справедливо для любых подобных фигур, можно заключить, что *теорема Пифагора выполняется не только для квадратов, но и для любых подобных фигур, построенных на сторонах треугольника.*

Но квадраты, конечно, являются чрезвычайно важным случаем. Как и прямоугольный треугольник, они построены по законам прямого угла. В них нет никаких новых длин, кроме сторон треугольника. Во всех рассуждениях сумма квадратов катетов играет главнейшую роль.

Есть ли подобные фигуры, для которых равенство $F_a+F_b=F_c$ можно обосновать, не прибегая к помощи квадратов? Конечно. Если не прибегать к новым фигурам, а работать только *с исходным треугольником*!

Если в прямоугольном треугольнике провести высоту, она разделит его снова на два прямоугольных треугольника (рис.16.5). Малые треугольники имеют те же углы α и β, что и

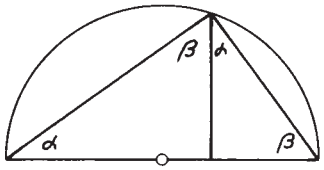


Рис. 16.5

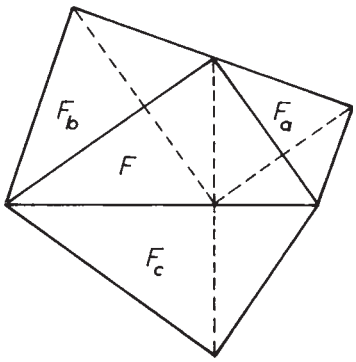


Рис. 16.6

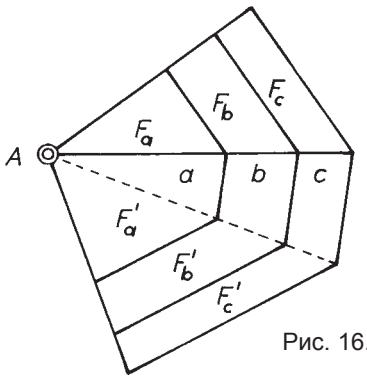


Рис. 16.7

исходный треугольник. Почему? Поскольку угол α принадлежит как основному, так и левому треугольнику, вторые острые углы у них также должны быть равны, составляя в сумме с α 90°. Итак, оба малых треугольника и большой треугольник подобны.

Эти треугольники мы и присоединим к основному, “переворачивая” их наружу вокруг сторон треугольника (рис. 16.6). Для их площадей очевидным образом выполняется соотношение:

$$F_a+F_b=F=F_c$$

F — площадь исходного треугольника. Конечно, нет других фигур, столь тесно связанных с первичным треугольником, как эти три. Для них теорема Пифагора очевидна.

Нельзя ли от этих особых треугольников перейти к другим

подобным фигурам? Соберем все три треугольника “в один угол” с вершиной *A* (рис. 16.7). Гипотенузы окажутся справа от *A* на горизонтали. *A* оказывается центром гомотетии. Под *a* нарисуем произвольный четырехугольник (F_a') и увеличим его гомотетией так, чтобы сторона *a* превратилась бы в *b* и затем в *c*. Отношения между сторонами четырехугольников соответственно и . Отношения площадей (равно у треугольников и четырехугольников) и .

Но если треугольники и четырехугольники увеличены в одинаковом отношении, то четырехугольники одинаково относятся к соответствующим треугольникам:

Назовем это постоянное отношение *v*.

Но это значит, что каждый четырехугольник в *v* раз больше соответствующего треугольника:

Поскольку теорема Пифагора справедлива для треугольников, она должна быть справедлива и при умножении на *v*, то есть для четырехугольников.

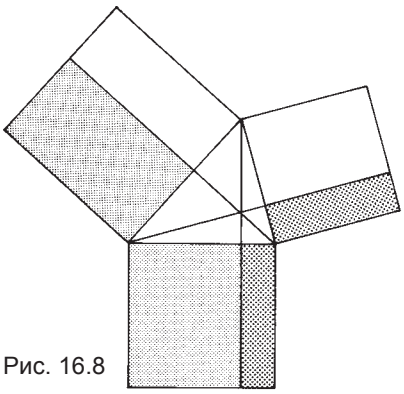


Рис. 16.8

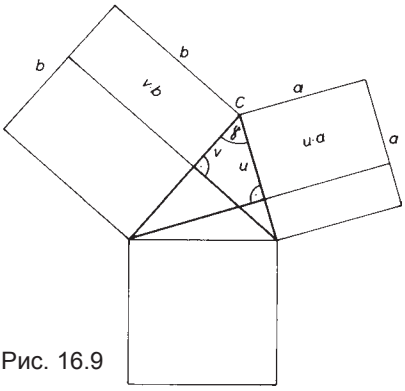


Рис. 16.9

Если бы под *a, b, c* вместо четырехугольников мы нарисовали пятиугольники или любые другие подобные фигуры, все предыдущие рассуждения остались бы в силе. Теорема Пифагора на самом деле работает для всех подобных фигур.

Квадраты нам теперь не нужны. Преимущества подобных рассуждений перед доказательствами с применением раскроя очевидны. Если заниматься ими в старших классах, ученики глубже входят в мышление. Но для семи- и восьмиклассников квадраты и раскрой более пригодны. На них легче развивать мыслительное рассмотрение, а это как раз то, что нужно в этом возрасте.

Под конец еще раз обратимся к квадратам, построенным на сторонах остро- и тупоугольного треугольников (рис. 7.5 Глава 7). Для них теорема Пифагора, конечно, не выполняется. В остроугольном треугольнике a^2+b^2 больше c^2. В остроугольном a^2+b^2 меньше c^2. Есть ли вообще какое-либо отношение между площадями этих квадратов? Да! Мы найдем его, проведя высоты и продлив их на квадраты; вначале в случае остроугольного треугольника (рис. 16.8).

Каждый квадрат делится на два прямоугольника. Длины и

ширины всех шести треугольников могут относиться друг к другу по-разному. Но: *прямоугольники, имеющие общей вершиной одну из вершин треугольника, равновелики.* (Теорема Карно, часто упоминаемая в этой связи Рудольфом Штейнером.)

Рассмотрим два верхних прямоугольника, с общей вершиной *C* (рис. 16.9). Почему они равновелики? Примыкающие к ним треугольники подобны, поскольку один угол у них прямой, а другой — общий и равен γ. Значит, и третий угол тоже одинаков. Значит, можно составить отношения сторон: в левом треугольнике рассмотрим отношение $u : b$, в правом ему соответствует отношение $v : a$. Итак:

$$\Big| \cdot a \cdot b$$

Умножим равенство на $a \cdot b$ и получим:

$$v \cdot b = u \cdot a$$

Левое произведение — площадь левого прямоугольника, правое — правого. Итак, площади прямоугольников действительно равны.

Соответствующие рассуждения можно привести и для пар прямоугольников в вершинах *A* и *B*. Они выделены на рис. 16.8.

Один равновеликий прямоугольник можно преобразовать

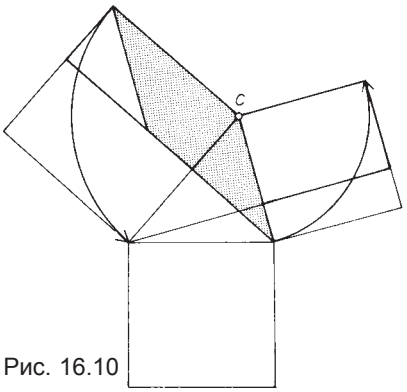


Рис. 16.10

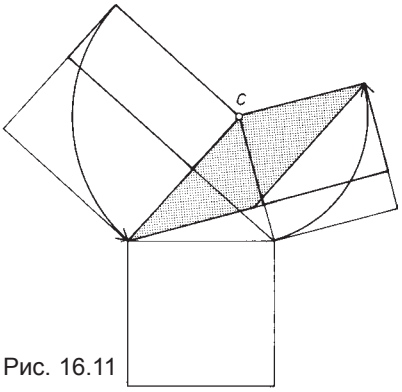


Рис. 16.11

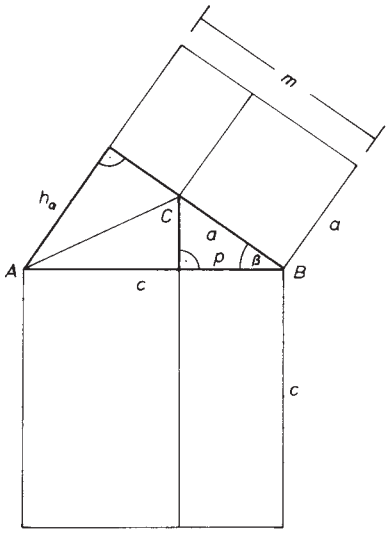


Рис. 16.12

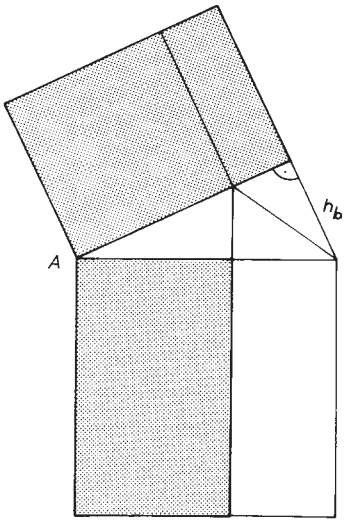
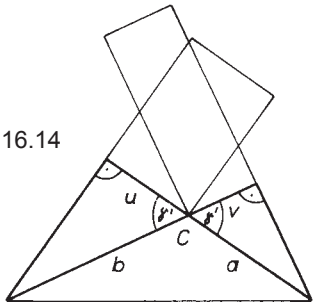


Рис. 16.13

Рис. 16.14



в другой. Продемонстрируем это для верхних прямоугольников. Левый верхний прямоугольник сместим в выделенный параллелограмм (рис. 16.10). Затем повернем его вокруг C на 90°. Поворот переводит параллелограмм в выделенный параллелограмм на рис. 16.11. Последний можно сместить в правый прямоугольник. Такие же три шага (смещение, поворот, смещение) можно проделать и по отношению к двум другим парам.

Обозначим площадь верхнего прямоугольника R, тогда

отношение квадратов сторон выглядит следующим образом (см. рис.16.8):

$$c^2=a^2+b^2-2R$$

$2R$ — мера превосходства верхних квадратов сторон над нижним.

Если мы проведем в тупоугольном треугольнике высоту h_a, то она пройдет мимо квадрата стороны (a^2) (рис. 16.12). Квадрат стороны оказывается не суммой двух прямоугольников, а разностью между большим, объемлющим квадрат, и меньшим, расположенным рядом с квадратом. Какие прямоугольники на этот раз равновелики? Больший и примыкающий к вершине B прямоугольник в нижнем квадрате. Из подобия обоих прямоугольных треугольников с общим углом β вытекает:

, и, значит: $p \cdot c=m \cdot a.$

Соответствующие рассуждения справедливы, если провести высоту h_b (рис. 16.13).

Равновелики и два верхних треугольника, лежащие между квадратами (рис. 16.14): они частично перекрывают друг друга. Два прямоугольных треугольника, пересекающиеся в вершине C, подобны, поскольку углы γ и γ' вертикальны. Значит:

, и, значит: $v \cdot b=u \cdot a.$

Обозначим площадь верхнего прямоугольника R, тогда отношение между квадратами:

$$c^2=a^2+b^2+2R.$$

Равновесие между тупоугольным и остроугольным случаями мы переживаем, обращаясь к прямоугольному треугольнику. С ним связано и особое положение высот (рис.16.15). Из всех высот прямоугольного треугольника только высота

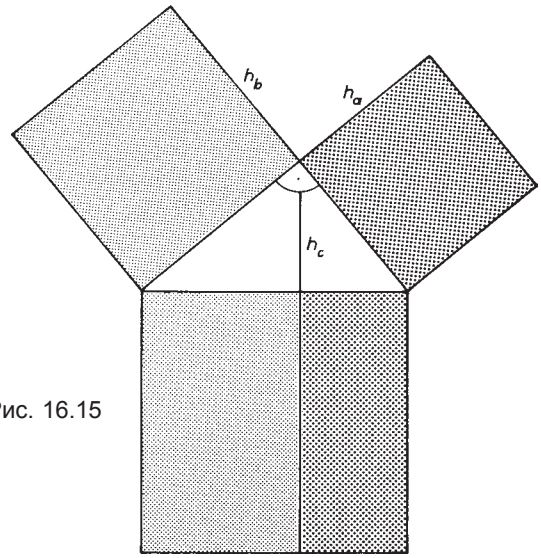


Рис. 16.15

h_c делит квадрат стороны. Две остальные высоты ничего не делят, но и не просто проходят мимо. Они касаются квадрата точно по стороне. Верхние прямоугольники, таким образом, “вжаты” в стороны квадратов; их площадь равна 0 *(R*=0*)*. Отсюда:

$$c^2=a^2+b^2.$$

Мы видим также, что теорема о катете является частным случаем теоремы Карно.

В 10-м классе ученики знакомятся с тригонометрической формулировкой теоремы Карно, с теоремой косинусов, которая объединяет все три случая:

$$c^2=a^2+b^2-2R \qquad c^2=a^2+b^2+2R \qquad c^2=a^2+b^2$$

и формулирует новое отношение между сторонами и углами треугольника.

Решения задач

Решения задач главы 1

Задача 1

AP ñì	g_1 ñì	h_1 ñì	R_1 ñì	g_2 ñì	h_2 ñì	R_2 ñì
2	1,8	5,1	9,18	10,2	0,9	9,18
4	3,6	4,2	15,12	8,4	1,8	15,12
6	5,4	3,3	17,82	6,6	2,7	17,82
8	7,2	2,4	17,28	4,8	3,6	17,28
10	9,0	1,5	13,50	3,0	4,5	13,50

Конечно, абсолютно точно измерить длины невозможно.

Задача 2

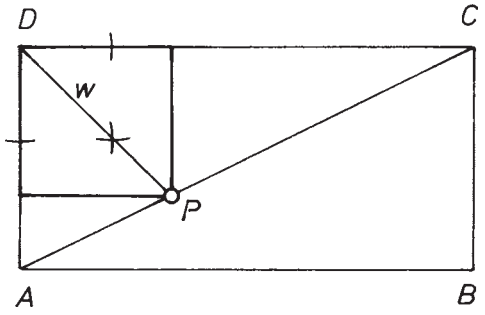
Если P лежит недалеко от A, R_1 — узкий и высокий, R_2 — широкий и низкий. Площадь обоих прямоугольников невелика. Если P движется к середине диагонали, g_1 растет, h_1 уменьшается; g_2 уменьшается, h_2 увеличивается. Площадь тоже увеличивается. Когда P приближается к C, R_1 становится низким и широким, R_2 — узким и высоким; площадь уменьшается.

Задача 3

Когда P оказывается в середине M диагонали, R_1 и R_2 — наибольшие. Каждая равна четверти целого прямоугольника — 18 см^2 в прямоугольнике из задачи 1.

Задача 4

Между A и M есть точка P, когда R_1 становится квадратом. Ее положение можно найти, если провести биссектрису угла D. Для R_2 нужно построить биссектрису угла B.



Задача 5

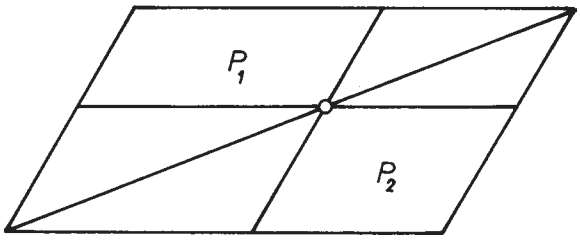
R_1 и R_2 не только равновелики, но и конгруэнтны.

Задача 6

В целом 9 прямоугольников. Равновелики прямоугольник слева внизу + R_1, с одной стороны, и + R_2 — с другой. То же самое верно для прямоугольника справа вверху.

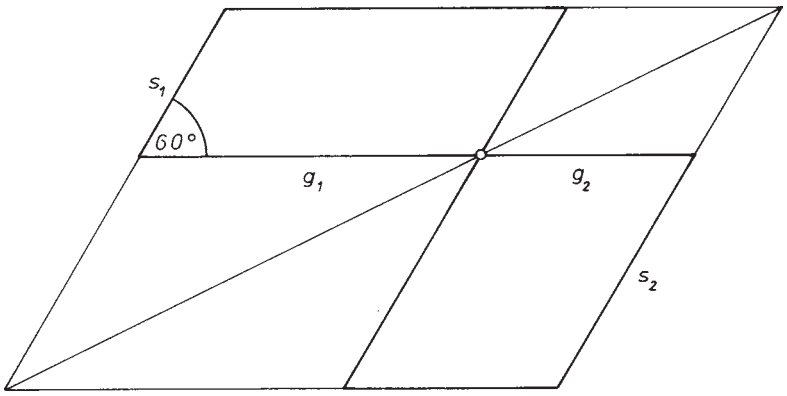
Задача 7

Параллелограммы P_1 и P_2 равновелики.



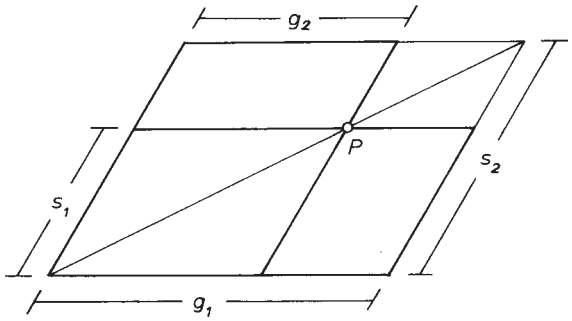
Задача 8

1-е решение:



g_1=8 см s_1=4 см g_2=5 см

2-е решение (экономя место):



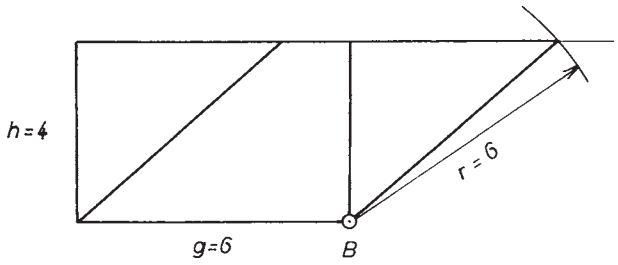
Задача 9

Построение соответствует рис. 11. Горизонтальные линии горизонтальны; вместо вертикалей появляются параллели к боковой линии параллелограмма. Точки *D* снова оказываются на гиперболе.

Решения задач главы 2

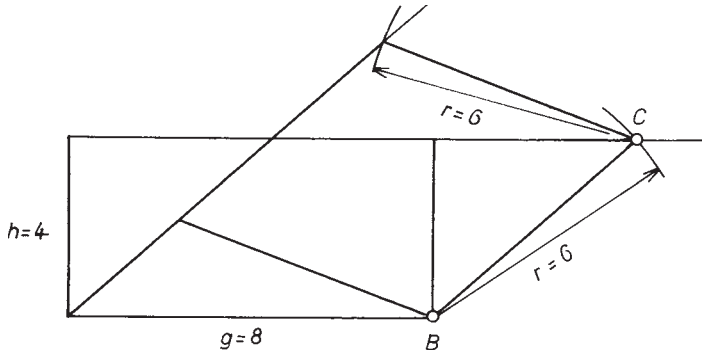
Задача 1

Провести окружность с центром *B* и радиусом 6 см. Смещение по горизонтали.

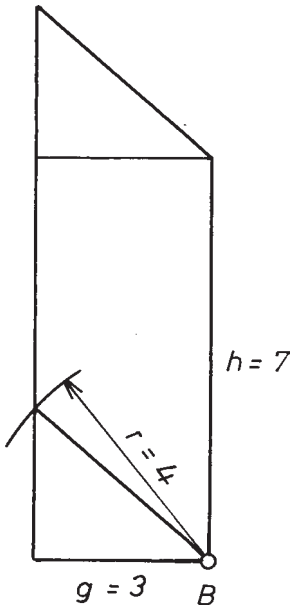


Задача 2

Провести окружность с центром *B* и радиусом 6 см. Смещение по горизонтали. Затем провести окружность с центром *C* и радиусом 6 см. Затем смещение в наклонном направлении.

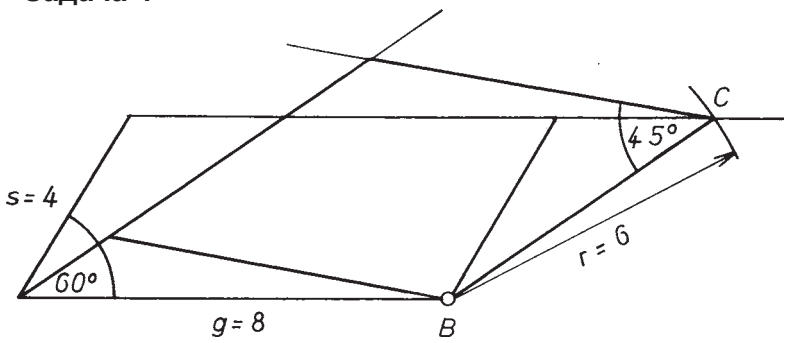


Задача 3



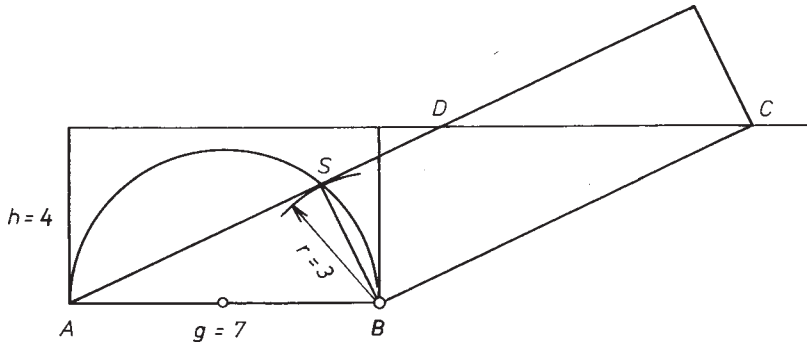
Провести окружность с центром *B* и радиусом 4 см. Смещение вверх.

Задача 4



Провести окружность с центром *B* и радиусом 6 см. Смещение по горизонтали. Затем построить угол 45° с вершиной *C*. Смещение в наклонном направлении.

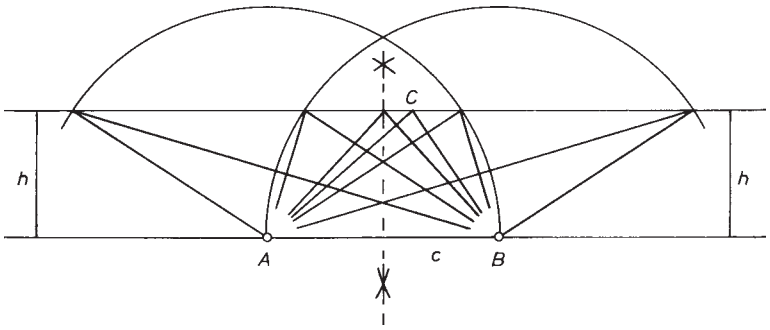
Задача 5



Построить окружность Фалеса; провести окружность с центром *B* и радиусом 3 см. Точка пересечения окружностей и *A* дают направление смещения равновеликого параллелограмма *ABCD*. Смещение в наклонном направлении в новый прямоугольник.

Решения задач главы 3

Задача 1

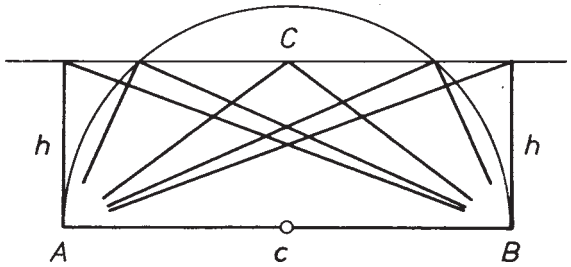


В нарисованном примере есть 5 равнобедренных треугольников. Если расстояние между параллельными прямыми с точностью равно *c*, таких треугольников только 3;

если h больше, чем c, — только 1. Символическая запись:

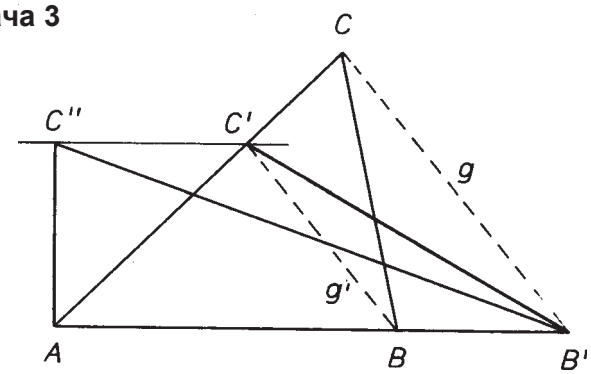
Если:	$h<c$	5 решений
	$h=c$	3 решения
	$h>c$	1 решение

Задача 2



Если:	$h<$	4 решения
	$h=$	3 решения
	$h>$	2 решения

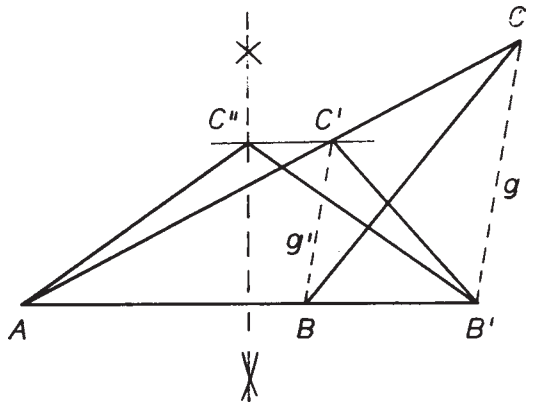
Задача 3



Два смещения:

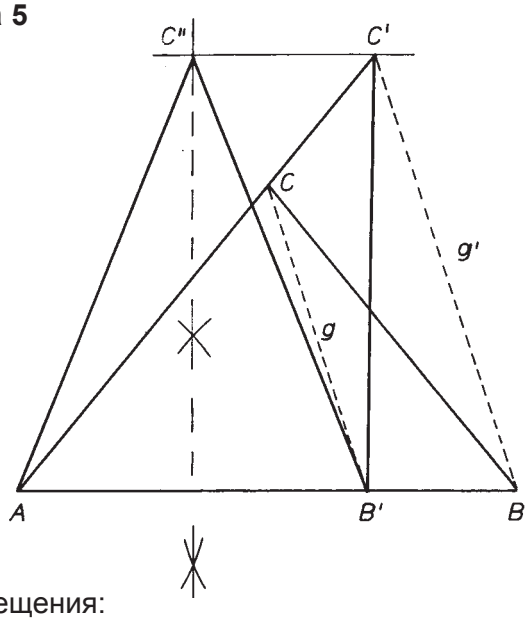
1. C в B' с осью смещения g'.
2. C' в C'' с осью смещения AB'.

Задача 4



Два смещения:
1. *C* в *B′* с осью смещения *g′*.
2. *C′* в *C′′* с осью смещения *AB′*.

Задача 5



Два смещения:
1. *B* в *C′* с осью смещения *g*.
2. *C′* в *C′′* с осью смещения *AB′*.

Задача 6

Пример 1: Высота *ha* точно 12 см.

a=14 см h_a=12 см F= =84 см^2

b=15 см h_b=11,2 см F= =84 см^2

c=13 см h_c =12,9 см F= =83,85 см^2

Высоту h_c можно определить по площади и основанию c:

F=

$2F=c \cdot h_c$

$=h_c$

Итак, высота h_c может быть выражена обыкновенной дробью: h_c= .

В виде десятичной дроби с точностью до двух знаков после запятой: h_c=12,92 см.

Пример 2: Высота h_a точно 4 см.

a=8,5 см h_a=4,9 см F= =20,825 см^2

b=5 см h_b=8,4 см F= =21 см^2

c=10,5 см h_c =4 см F= =21 см^2

По формуле площади: h_a= =4,94 см (с точностью до двух знаков после запятой).

Задача 7

Если *c* гипотенуза, то *C* точка пересечения высот; ведь катет — это одновременно высота к другому катету: $h_a=b$ и $h_b=a$. То есть две формулы, $F=$ и $F=$, превращаются в одну:

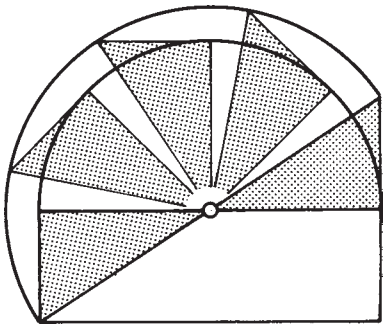
$$F= \quad .$$

Примеры:

a	*b*	*c*	*F*=	h_c=
8 см	6 см	10 см	=24 см^2	=4,8 см
5 см	12 см	13 см	=30 см^2	=4,62 см
8 см	15 см	17 см	=60 см^2	=7,06 см

Задача 8

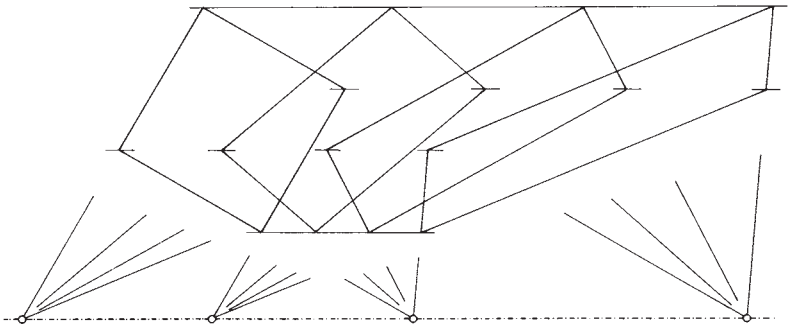
Решения задач главы 4



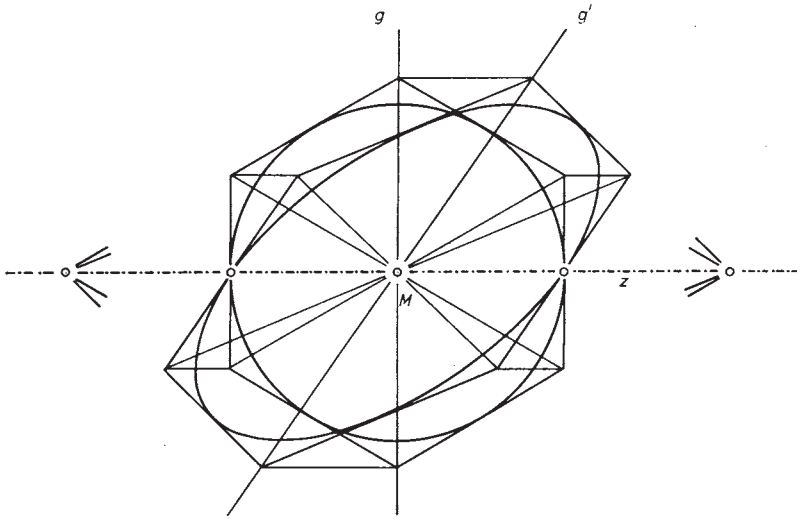
Задача 1

Решение в соответствии с рис. 4.13 в тексте.

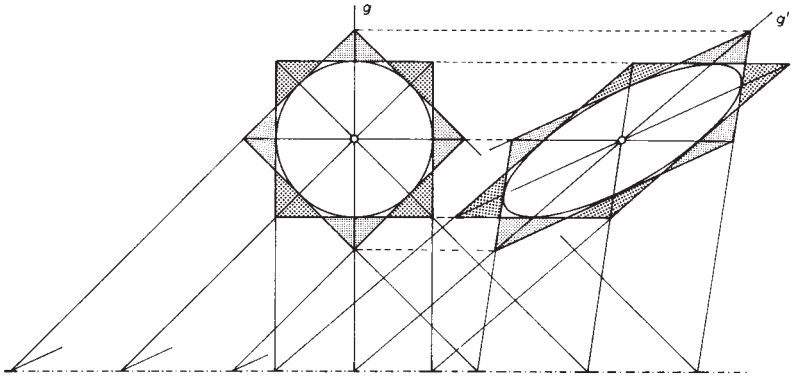
Задача 2



Задача 3

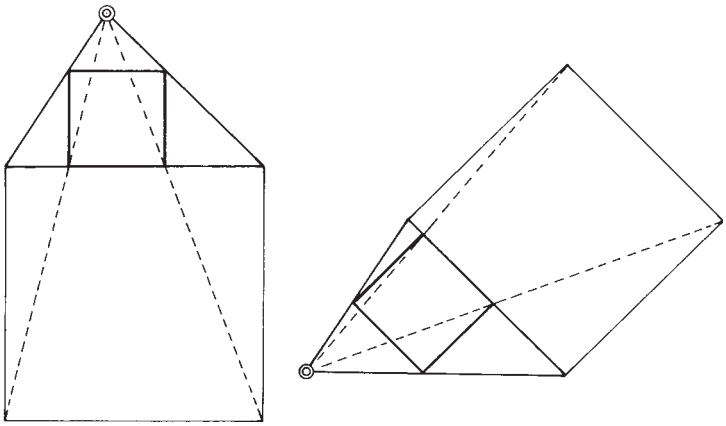


Задача 4



Решения задач главы 5

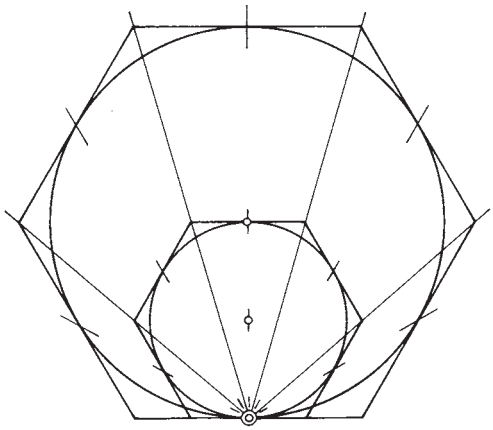
Задача 1



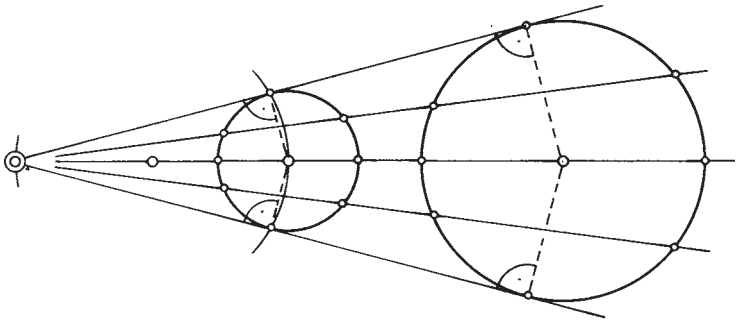
Задача 2

Решение в принципе то же, что и для вписанного квадрата (рис. 5.15—5.20). Для полного круга решений бесконечно много, для полукруга — два, для сектора — шесть.

Задача 3



Задача 4



Задача 5

Опишем построение по шагам:

1-й шаг: Построй биссектрису *w*.

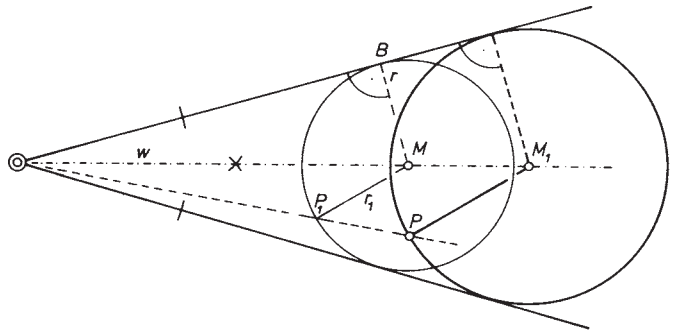
2-й шаг: Выбери на *w* произвольную точку *M* (центр ок-

ружности) и восстанови из нее перпендикуляры к боковым сторонам (появятся *r* — радиус окружности и *B* — точка касания окружности с боковой стороной; на рисунке они показаны только для одной стороны).

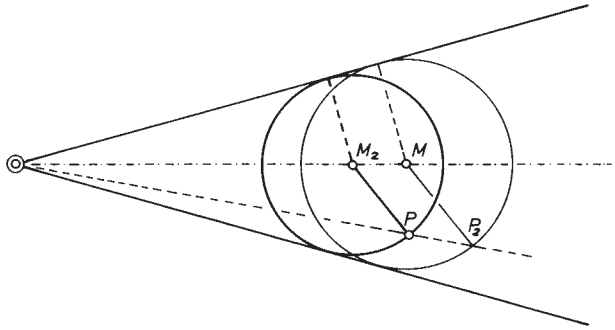
3-й шаг: Соедини *P* с центром *Z* и найди точку пересечения получившейся прямой с окружностью (P_1).

4-й шаг: Соедини P_1 с *M* и смести радиус r_1 параллельно в *P*. M_1 — центр большего круга, проходящего через *P*.

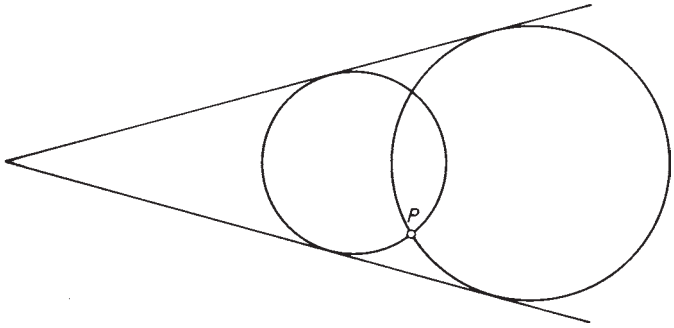
5-й шаг: Восстанови из M_1 перпендикуляр к стороне (определится радиус и точка касания).



Построение малого круга через *P*: шаги те же, только точка пересечения P_2 другая.



Обе окружности без вспомогательных линий.



Решения задач главы 10

Задача 1

Задача 2

176	42
2209	47
2704	52
3136	56
4096	64
4489	67

5625	75
6241	79
6889	83
7396	86
9025	95
9409	97

15129	123
17424	132
70225	265
76176	276
94249	307
97969	313